数字信号处理

周治国

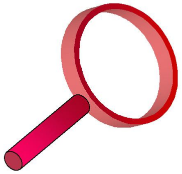
2019.5

第五章 数字滤波器

IIR数字滤波器

双线性变换法

IIR数字滤波器设计



- **一、从模拟滤波器设计数字滤波器**
  - **1、从模拟低通滤波器设计数字低通滤波器**
    - （1）脉冲/阶跃响应不变法
    - **双线性变换法**
  - 2、IIR数字低通滤波器的频率变换（高通、带通、带阻数字滤波器的设计
    - （1）直接由模拟原型到各种类型数字滤波器的转换
    - （2）从数字低通滤波器到各种类型数字滤波器的转换
- 二、直接设计IIR数字滤波器
  - 1、IIR数字低通滤波器的频域直接设计方法
    - （1）零、极点位置累试法（点阻滤波器）
    - （2）幅度平方函数法
  - 2、IIR数字低通滤波器的时域直接设计方法
    - （1）帕德逼近法
    - （2）波形形成滤波器设计
- 三、IIR数字滤波器的优化设计方法
  - 1、最小均方误差方法
  - 2、最小p误差方法
  - 3、最小平方逆设计法
  - 4、线性规划设计方法

双线性变换方法（Bilinear Transformation）

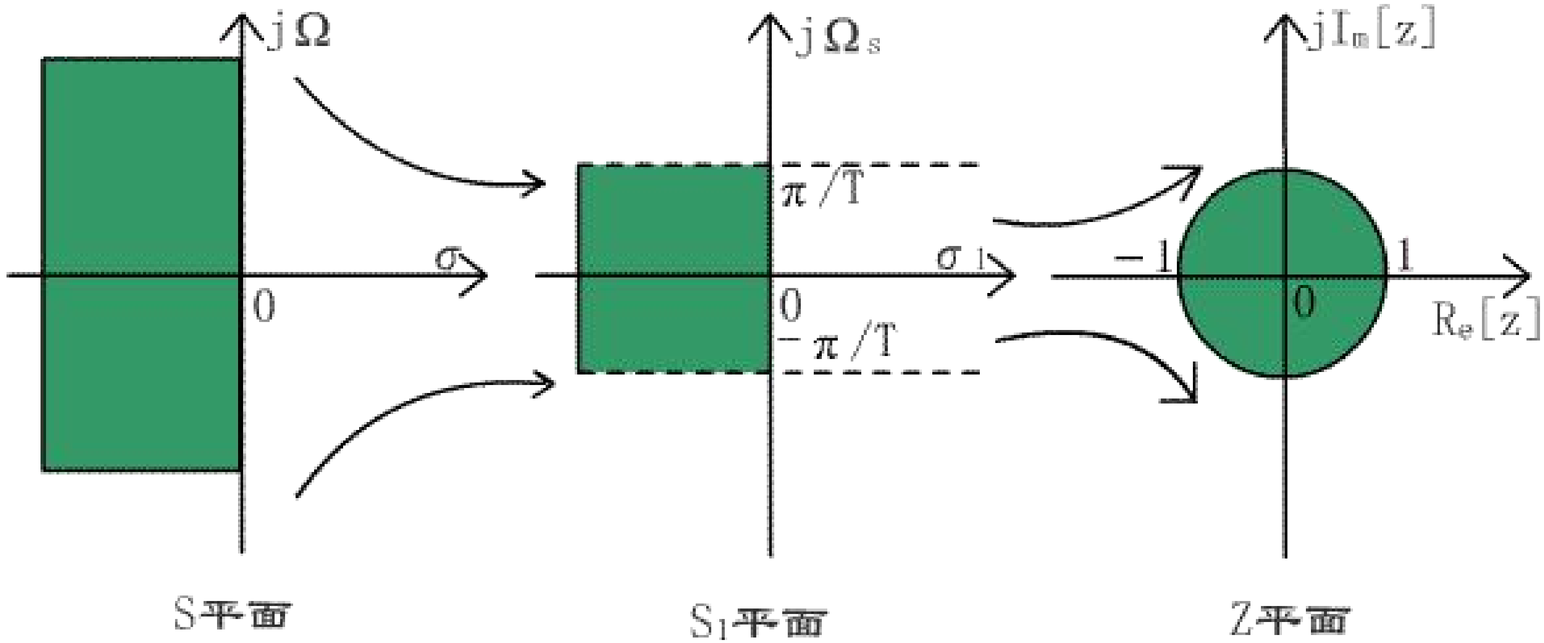
原理推导

脉冲响应不变法的主要缺点是频谱交叠产生的混淆，这是从S平面到Z平面的标准变换$z=e^{sT}$的多值对应关系导致的，为了克服这一缺点，设想变换分为两步：

第一步：将整个S平面压缩到S1平面的一条横带里；

第二步：通过标准变换关系将此横带变换到整个Z平面上去。

由此建立S平面与Z平面一一对应的单值关系，消除多值性，也就消除了混淆现象。



双线性变换的映射关系

双线性变换方法（Bilinear Transformation）

映射关系：

频域直接映射

$$H_a(s) \rightarrow H(z)$$

什么是双线性变换？

$$(1) \quad z = \frac{2/T + s}{2/T - s}; \quad s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$(2) \quad |z| = \sqrt{\frac{(2/T + \sigma)^2 + \Omega^2}{(2/T - \sigma)^2 + \Omega^2}}$$

$$(3) \quad s = j\Omega,\ z = e^{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 2\tan^{-1}\left(\dfrac{\Omega T}{2}\right) \\ \Omega = \dfrac{2}{T}\tan\left(\dfrac{\omega}{2}\right) \end{cases}$$

s与z之间有简单的代数关系

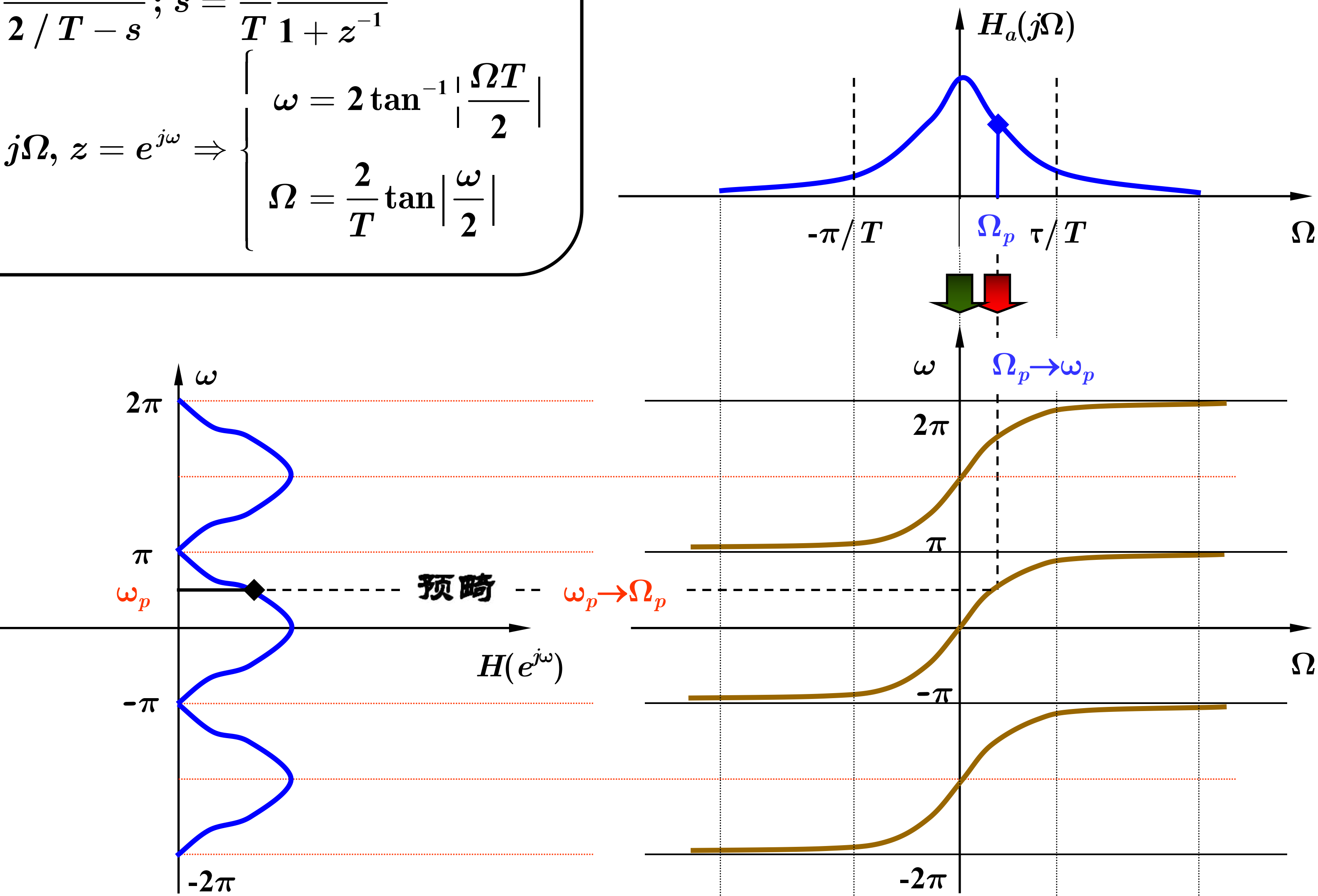
双线性变换方法（Bilinear Transformation）

频域直接映射

$$H_a(s) \rightarrow H(z)$$

(1) $z = \dfrac{2/T + s}{2/T - s}$; $s = \dfrac{2}{T}\dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$

(2) $s = j\Omega,\ z = e^{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 2\tan^{-1}\left|\dfrac{\Omega T}{2}\right| \\ \Omega = \dfrac{2}{T}\tan\left|\dfrac{\omega}{2}\right| \end{cases}$



与脉冲响应不变换法z域s域映射关系比较（混叠失真）

优缺点

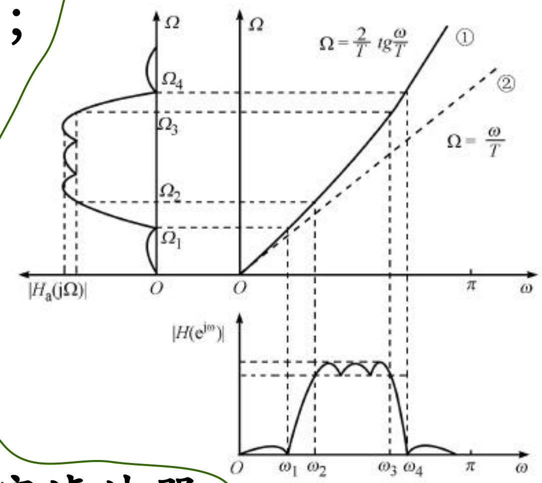
优点：消除了混叠误差

缺点：频率ω与Ω之间非线性

为什么要预畸呢?

- 若数字带通滤波器的四个截止频率为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$；
- 按线性变换所对应的四个模拟截止频率分别为：

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1}{T},\ \Omega_2 = \frac{\omega_2}{T},\ \Omega_3 = \frac{\omega_3}{T},\ \Omega_4 = \frac{\omega_4}{T}$$



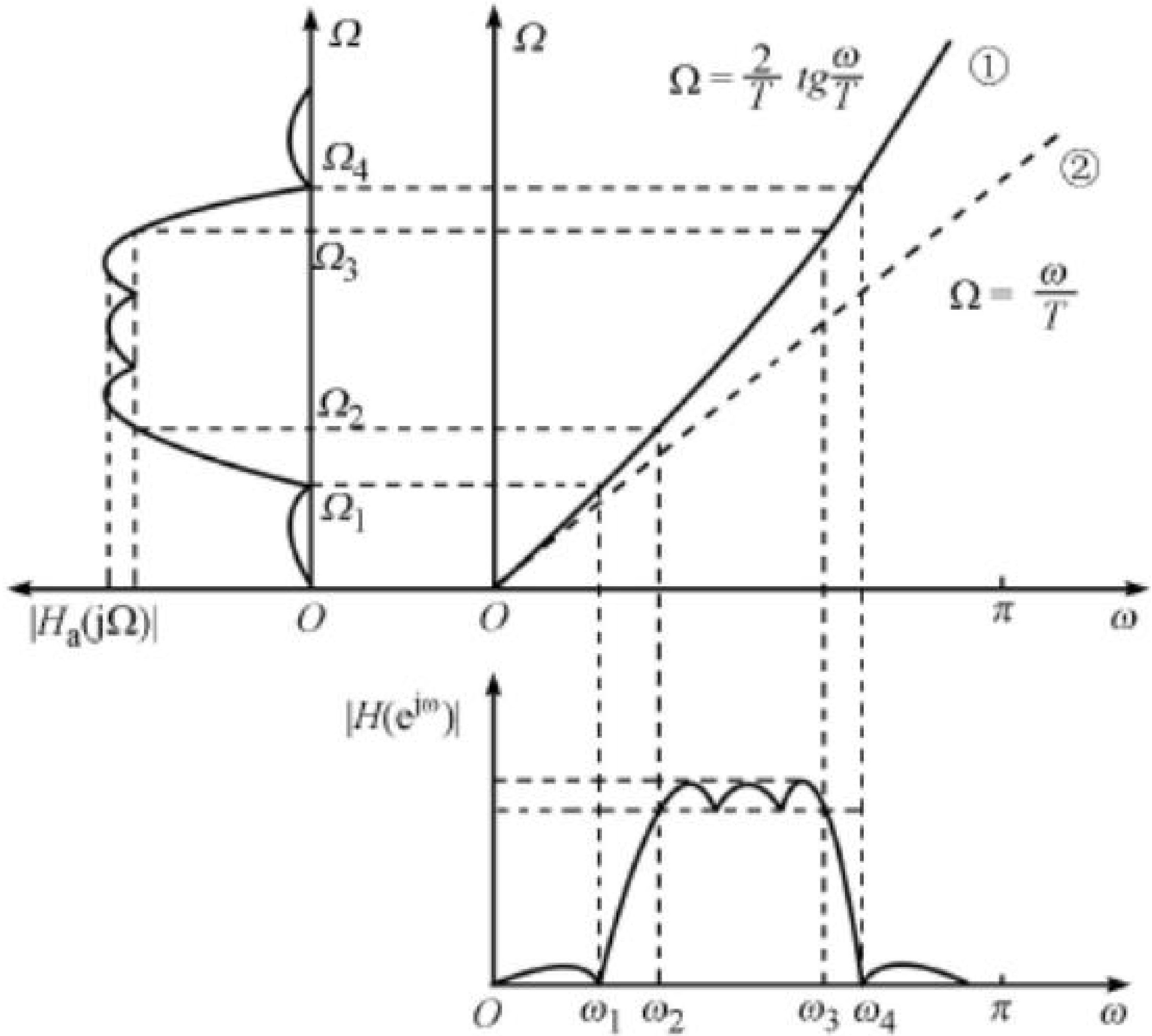
- 再进行模拟带通滤波器的系统函数的求解；
- 求出后，如用双线性变换将模拟滤波器变换成为数字滤波器

$$s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \qquad \omega = 2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$

- 显然就不等于原来给出的数字滤波器的频率要求，即现在带通的四个截止频率不等于原来的 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ 需对第二步进行预畸。即模拟滤波器按预畸后的 $\Omega_k = (2/T)\,\mathrm{tg}(\omega_k/2)$ 进行设计

由数字到模拟，再由模拟到数字

Important !!!



Ω
Ω
$\Omega = \frac{2}{T} tg\frac{\omega}{T}$
①
②
$\Omega = \frac{\omega}{T}$
Ω_4
Ω_3
Ω_2
Ω_1
$|H_a(j\Omega)|$
O
O
π
ω
$|H(e^{j\omega})|$
O
ω_1
ω_2
ω_3
ω_4
π
ω

双线性变换方法（模拟滤波器数字化）

频域直接映射

$$z=\frac{2/T+s}{2/T-s};\quad s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=H_a\left(\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

$$H(e^{jw})=H_a(j\Omega)\Big|_{\Omega=\frac{2}{T}\tan\left|\frac{\omega}{2}\right|}=H_a\left(\frac{2}{T}\tan\left|\frac{\omega}{2}\right|\right)$$

s与z之间有简单的代数关系

IIR滤波器设计

提示：

(1)所有小数均计算到小数点后两位

(2)假设取样间隔$T=1$

(3)双线性变换的频率变换关系为：

$\Omega = 2/T tg(\omega/2)$

(4)模拟巴特沃斯低通滤波器$H_a(s)$的极点为：

$s_k = \Omega_c e^{j\pi[1/2+(2k-1)/(2N)]}, k=1,2,\cdots,N$

(4)模拟巴特沃斯低通滤波器平方函数为：

$A^2(\Omega) = 1/[1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}]$

IIR滤波器设计1--往年真题

如果所要设计的数字低通滤波器满足下列条件：

(a) 在$\omega \le \pi/8$的通带范围内幅度变化不大于$3dB$,

(b) 在$\pi/2 \le \omega \le \pi$的阻带范围内幅度衰减不小于$20dB$,

试用双线性变换法，设计相应的数字巴特沃斯低通滤波器，

(1) 确定滤波器的阶数N

(2) 确定滤波器的系统函数$H(z)$

(3)确定滤波器的频率响应$H(e^{j\omega})$

(4)给出滤波器的任意一种结构实现形式 √

03B(05-06)

解：

(1) 预畸

$$\Omega = \frac{2}{T} tg\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Omega_c = 2tg\frac{\pi}{16} = 0.4 \ , \Omega_s = 2tg\frac{\pi}{4} = 2$$

(2)由已知条件列出对模拟滤波器的衰减要求

$$A^2(\Omega) = \left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\Rightarrow 20\lg\left|H_a(j\Omega_c)\right| = -10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\Omega_c)\right| \ge -3dB \\ 20\lg\left|H_a(j\Omega_s)\right| \le -20dB \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_c}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \ge -3dB \\ -10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \le -20dB \end{cases}$$

由题干3dB，可直接得到$\Omega_c = 0.40$

解出：$N = 1.42$，取$N = 2$

(3)直接由表5-1

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^{\ 2}}{s^2 + \sqrt{2}\Omega_c s + \Omega_c^{\ 2}}$$得到

$$s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\text{代入}H_a(s)$$

$$H(z)=H_a(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{0.16(1+z^{-1})^2}{5.28-7.26z^{-1}+3.02z^{-2}}$$

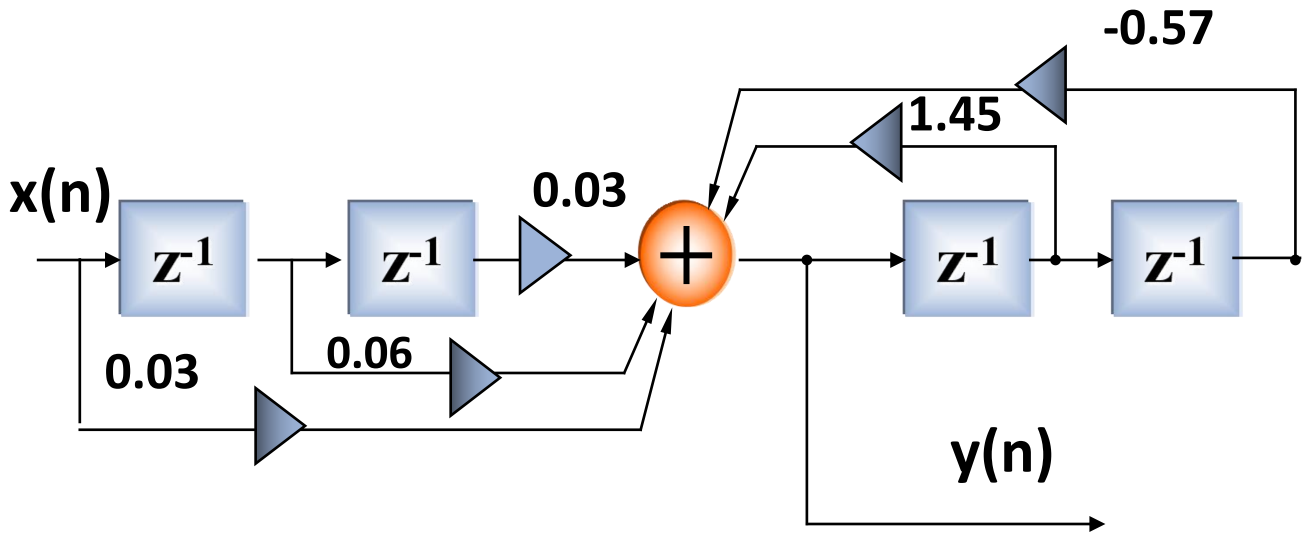
$$=\frac{0.03+0.06z^{-1}+0.03z^{-2}}{1-1.45z^{-1}+0.57z^{-2}}$$

(4)频率响应

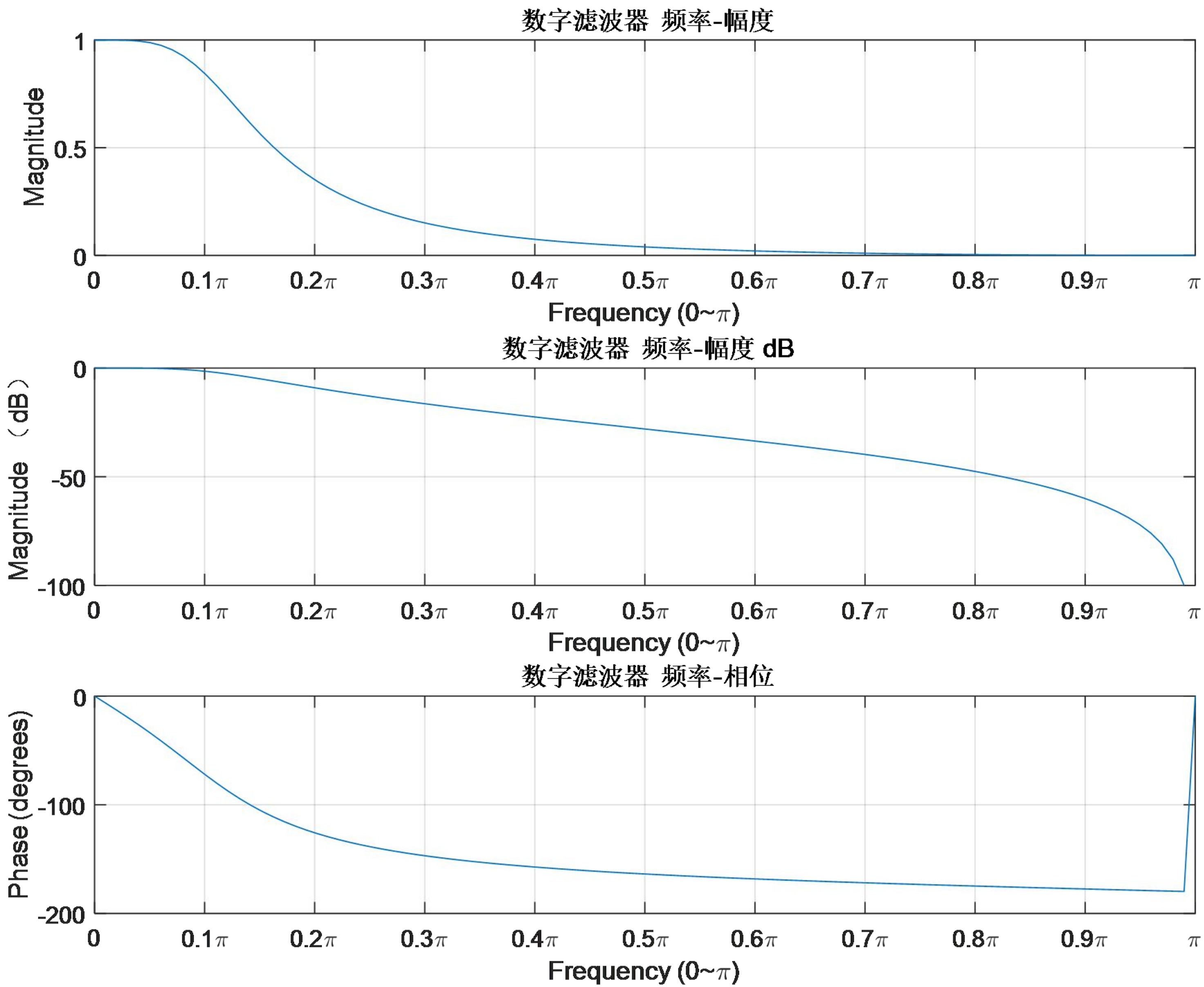
$$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

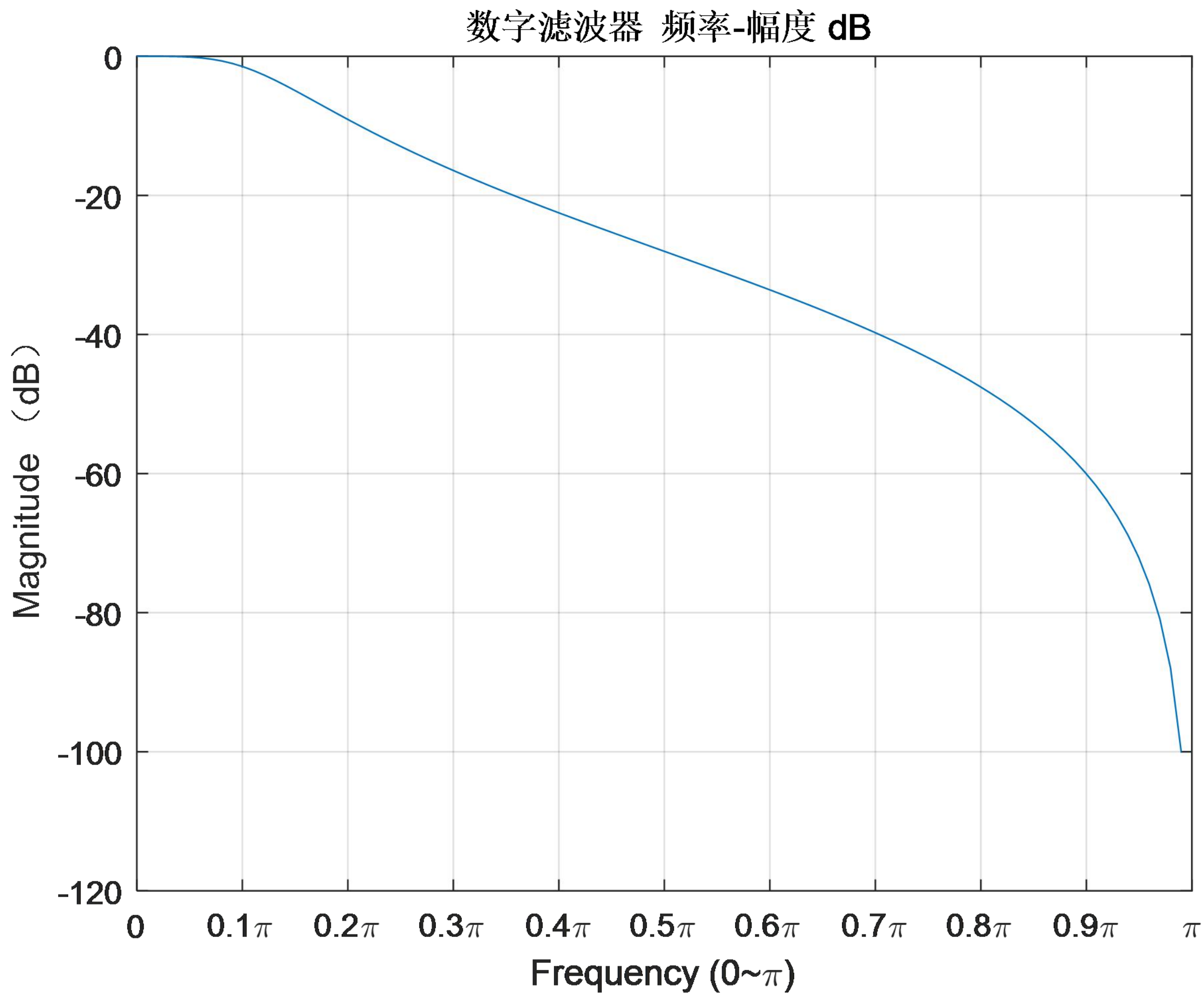
(5)滤波器结构

直接I，II



ch5_bilinear3.m





数字滤波器 频率-幅度 dB
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
Magnitude （dB）
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
Frequency (0~π)

IIR滤波器设计2—习题集P91

用双线性变换法设计相应的数字巴特沃斯低通滤波器，

指标：$0 \le f \le 2.5Hz$衰减小于$3dB$

$f \ge 50Hz$衰减大于或等于$40dB$

抽样频率$f_s = 200Hz$。

(1)确定滤波器的阶数N

(2)确定滤波器的系统函数$H(z)$

(3)确定滤波器的频率响应$H(e^{j\omega})$

(4)给出滤波器的任意一种结构实现形式　　　　√

由模拟指标到数字指标，由数字指标预畸到模拟指标，设计模拟滤波器，再由模拟滤波器到数字滤波器

解：

(1)把模拟角频率转化为数字角频率

$$T=\frac{1}{f_s}=\frac{1}{200},$$

$$\Rightarrow \Omega_c'=2\pi f_c=5\pi \qquad \omega_c=\Omega_c' T=\frac{\pi}{40},$$

$$\Rightarrow \Omega_s'=2\pi f_s=100\pi \quad \omega_s=\Omega_s' T=\frac{\pi}{2},$$

(2) 预畸

$$\Omega=\frac{2}{T}tg\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Omega_c=\frac{2}{T}tg\left(\frac{\omega_c}{2}\right)=400tg\frac{\pi}{80}$$

$$=15.7=5\pi$$

$$\Rightarrow \Omega_s=\frac{2}{T}tg\left(\frac{\omega_s}{2}\right)=400tg\frac{\pi}{4}$$

$$=400=127.39\pi$$

(3)列出对模拟滤波器的衰减要求

$$A^2(\Omega)=\left|H_a(j\Omega)\right|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\Rightarrow 20\lg\left|H_a(j\Omega_c)\right|=-10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\Omega_c)\right|\geq -3dB \\ 20\lg\left|H_a(j\Omega_s)\right|\leq -40dB \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_c}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]\geq -3dB \\ -10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]\leq -40dB \end{cases}$$

由题干3dB，可直接得到$\Omega_c=15.7$

取等号解出：$N=1.42$，取$N=2$

(4)直接由表5-1

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^{\ 2}}{s^2+\sqrt{2}\Omega_c s+\Omega_c^{\ 2}}$$ 得到

$$\Rightarrow H_a(s)=\frac{246.5}{s^2+22.2s+246.5}$$

将 $s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 代入 $H_a(s)$

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

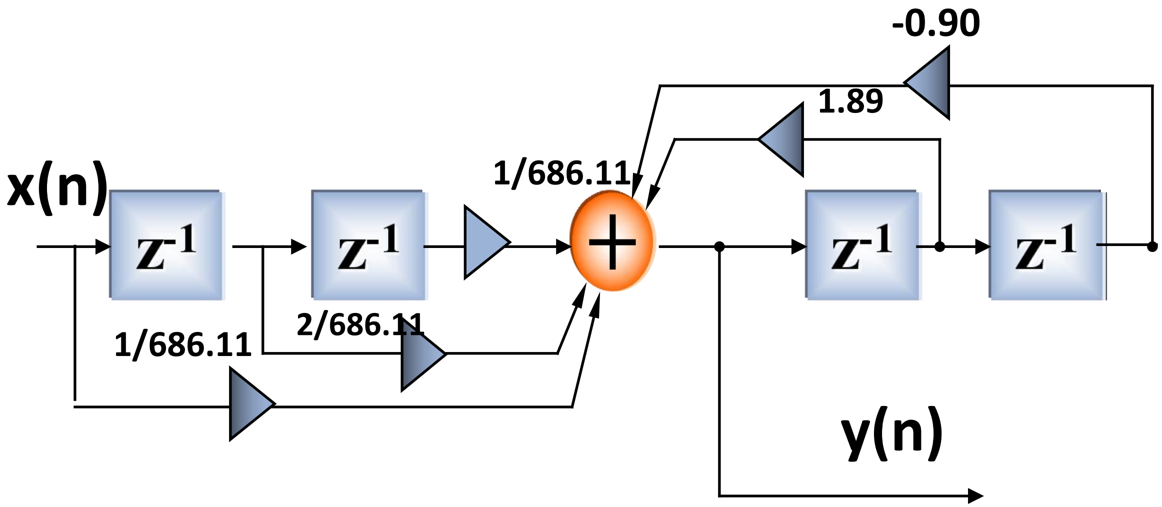
$$\Rightarrow H(z)=\frac{1}{686.11}\bullet\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-1.89z^{-1}+0.90z^{-2}}$$

(5)频率响应

$$H(e^{j\omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

(6)滤波器结构

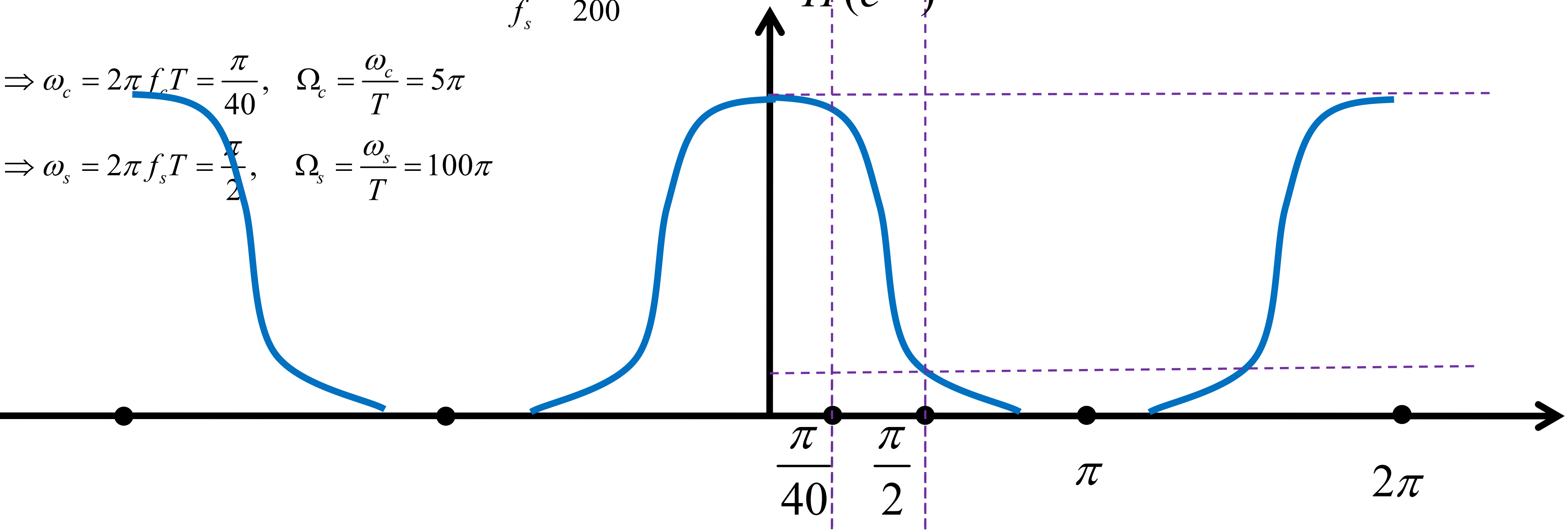
直接I，II



把模拟角频率转化为数字角频率 $T=\dfrac{1}{f_s}=\dfrac{1}{200}$，

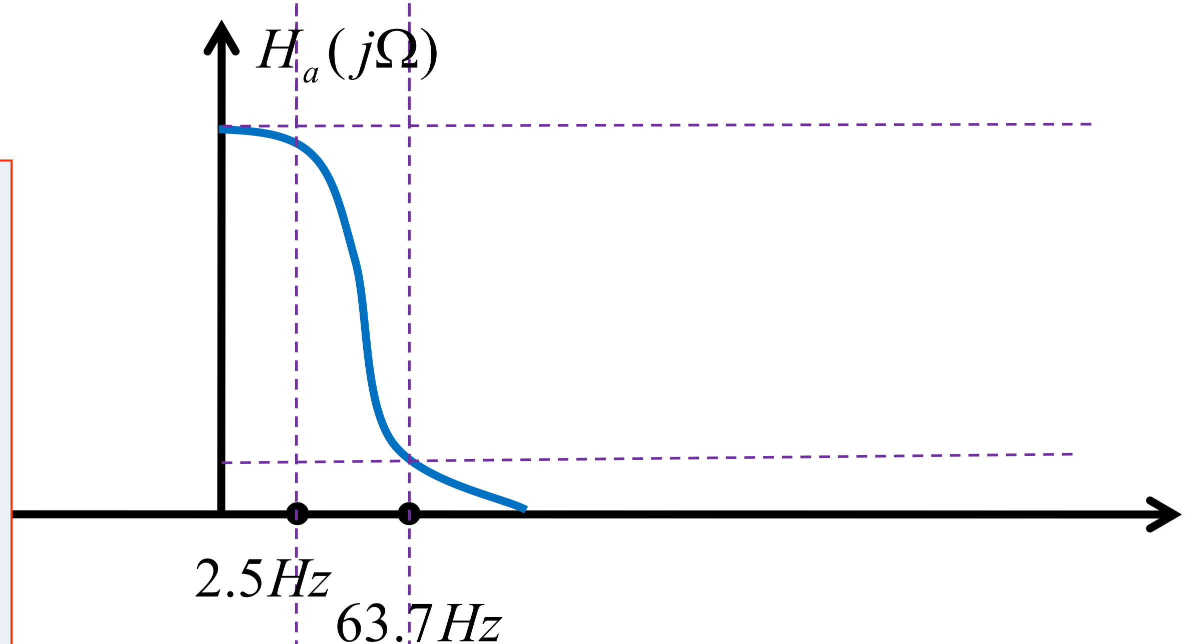
$$\Rightarrow \omega_c = 2\pi f_c T = \frac{\pi}{40}, \quad \Omega_c = \frac{\omega_c}{T} = 5\pi$$

$$\Rightarrow \omega_s = 2\pi f_s T = \frac{\pi}{2}, \quad \Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = 100\pi$$



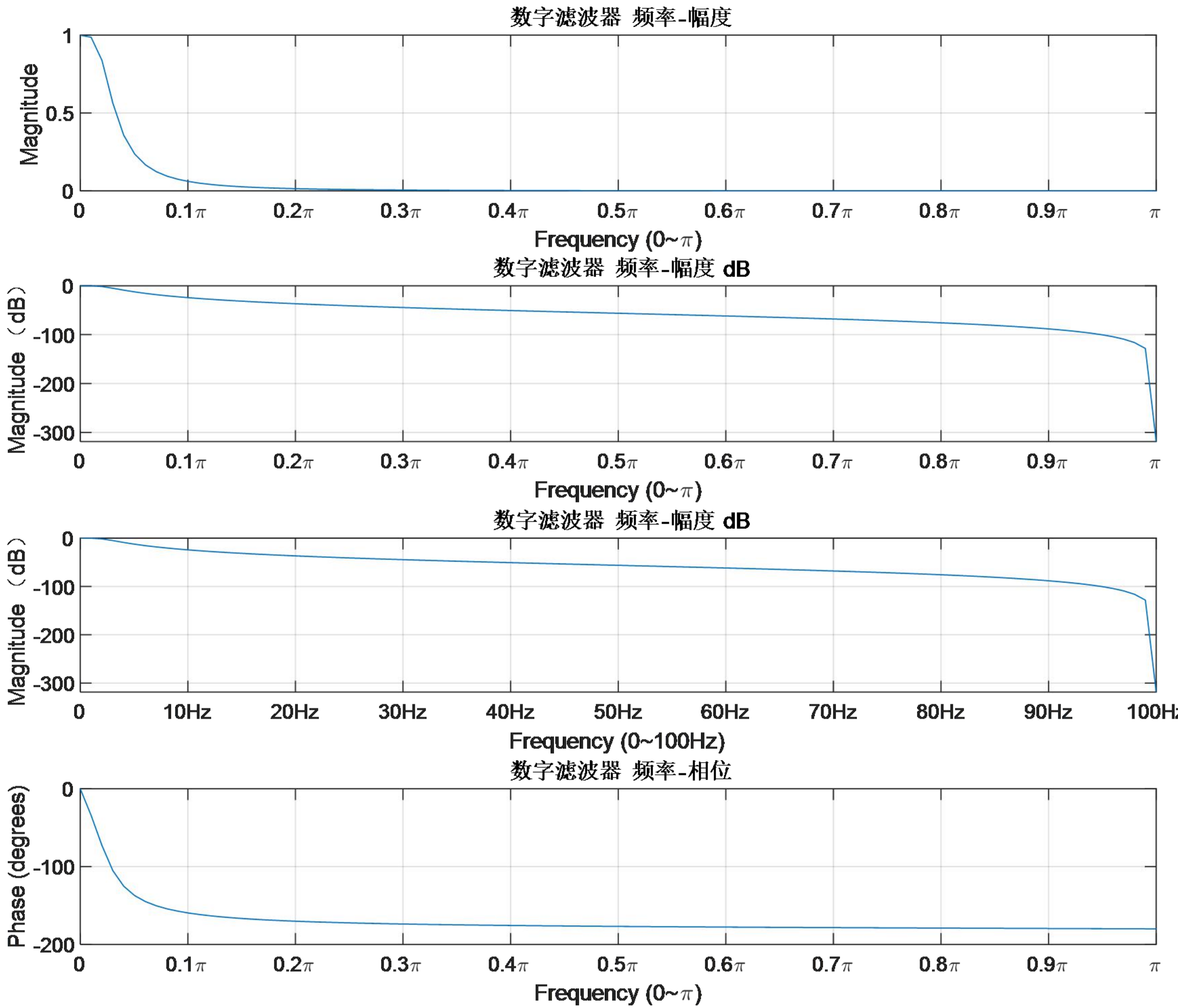
$\omega = \Omega T$

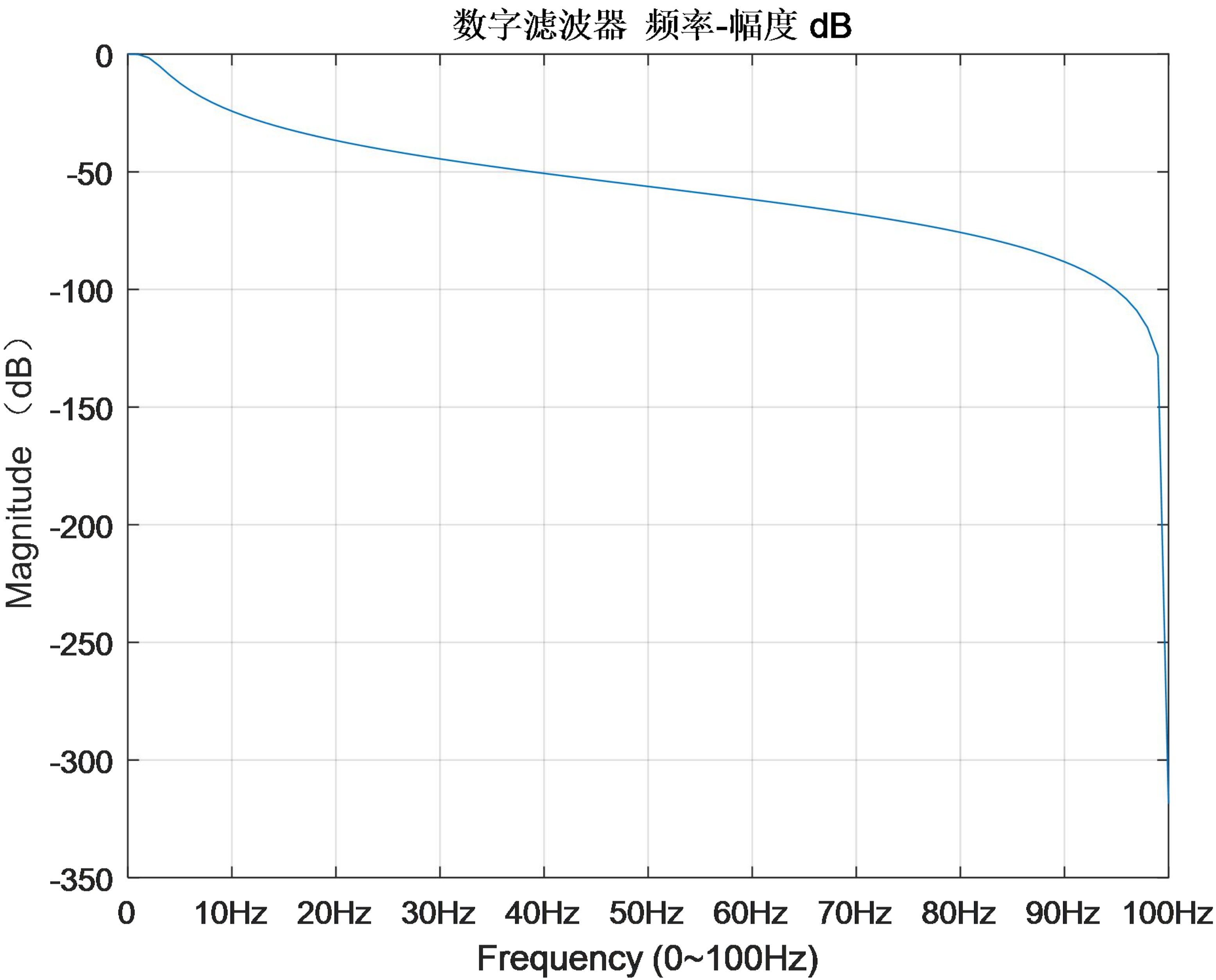
线性映射



理解：P192数字频率响应相对于模拟频率响应产生变形

（模拟和数字横坐标不成线性，导致过渡带斜率不相同，即变形）


数字滤波器 频率-幅度
Magnitude
1
0.5
0
0 0.1π 0.2π 0.3π 0.4π 0.5π 0.6π 0.7π 0.8π 0.9π π
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-幅度 dB
Magnitude （dB）
0
-100
-200
-300
0 0.1π 0.2π 0.3π 0.4π 0.5π 0.6π 0.7π 0.8π 0.9π π
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-幅度 dB
Magnitude （dB）
0
-100
-200
-300
0 10Hz 20Hz 30Hz 40Hz 50Hz 60Hz 70Hz 80Hz 90Hz 100Hz
Frequency (0~100Hz)
数字滤波器 频率-相位
Phase (degrees)
0
-100
-200
0 0.1π 0.2π 0.3π 0.4π 0.5π 0.6π 0.7π 0.8π 0.9π π
Frequency (0~π)



数字滤波器 频率-幅度 dB
0
-50
-100
-150
-200
-250
-300
-350
Magnitude （dB）
0
10Hz
20Hz
30Hz
40Hz
50Hz
60Hz
70Hz
80Hz
90Hz
100Hz
Frequency (0~100Hz)

IIR滤波器设计3--往年真题

用双线性变换法设计一个数字巴特沃斯低通滤波器，并给出其直接II型结构实现形式。要求满足下述指标：

(a) 在$\omega \le \pi / 8$的通带范围内幅度变化不大于$3dB$，

(b) 在$\pi / 2 \le \omega \le \pi$的阻带范围内幅度衰减不小于$19dB$，

试：

(1) 确定滤波器的阶数N

(2) 确定滤波器的系统函数$H(z)$

注：在IIR数字滤波器设计中，假设取样间隔$T = 1$。

02(04-05)

IIR滤波器设计4--往年真题

如果所要求的数字低通滤波器满足下述指标：

(a) 在$|\omega| \le 0.2\pi$的通带范围内幅度变化不大于$2dB$,

(b) 在$0.6\pi \le |\omega| \le \pi$的阻带范围内幅度衰减不小于$15dB$,

试用双线性变换法，设计相应的数字巴特沃斯低通滤波器

(1) 确定滤波器的阶数N

(2) 确定滤波器的系统函数$H(z)$

(3)给出数字滤波器的任意一种结构实现形式

04(06-07)

IIR滤波器设计5--往年真题

用双线性变换法设计一个满足下述指标要求的数字巴特沃斯低通滤波器，

在通带截止频率$\omega_p = 0.1\pi$处的衰减不大于$1dB$，

在阻带起始频率$\omega_p = 0.5\pi$处的衰减不小于$15dB$，

(1) 确定滤波器的阶数N

(2) 确定滤波器的系统函数$H(z)$

(3)给出滤波器的任意一种结构实现形式

注：在IIR数字滤波器设计中，假设取样间隔$T = 1$。

06(08-09)