数字信号处理

周治国

2019.3

第三章
离散傅里叶变换

§3-5 离散傅里叶变换的性质

1.线性特性

迭加原理

$$x_3(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$$

$$X_3(k)=DFT\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=aX_1(k)+bX_2(k)$$

2.可用正变换计算逆变换

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)W_N^{kn}\right]^*=\frac{1}{N}\left\{DFT[X^*(k)]\right\}^*$$

3.对称定理

$$\forall x(n)\xleftrightarrow{DFT}X(k)$$

则 $$\frac{1}{N}X(n)\xleftrightarrow{DFT}x(-k)\triangleq x(N-k)$$

$$0\le n\le N-1 \qquad\qquad 0\le k\le N-1$$

§3-5 离散傅里叶变换的性质

4.反转定理

$$\forall x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$$

则 $$x(-n) \xleftrightarrow{DFT} X(-k)$$

5.序列的总和

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) = X(k)\Big|_{k=0} = X(0)$$

6.序列的起始值

$$x(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

§3-5 离散傅里叶变换的性质

7.序列加长后的DFT

$$\forall x(n), 0 \le n \le N-1 \longleftrightarrow X(k), 0 \le k \le N-1$$

令

$$g(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & N \le n \le mN-1 \quad \forall m \in I \end{cases}$$

问题：

$$G(k) \overset{\triangle}{=} DFT\left[g(n)\right] \sim X(k)$$

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

由DFT的定义：

$$G(k)=\sum_{n=0}^{mN-1}g(n)W_{mN}^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{Nm}kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{k}{m}n}$$

$$=X\left(\frac{k}{m}\right)\overset{\triangle}{=}X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}\frac{k}{m}}$$

$$k=0,1,\cdots,mN-1$$

而 $X(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$

$$k=0,1,\cdots,N-1$$

$$X(e^{j\omega})\xleftrightarrow{DTFT}x(n)$$

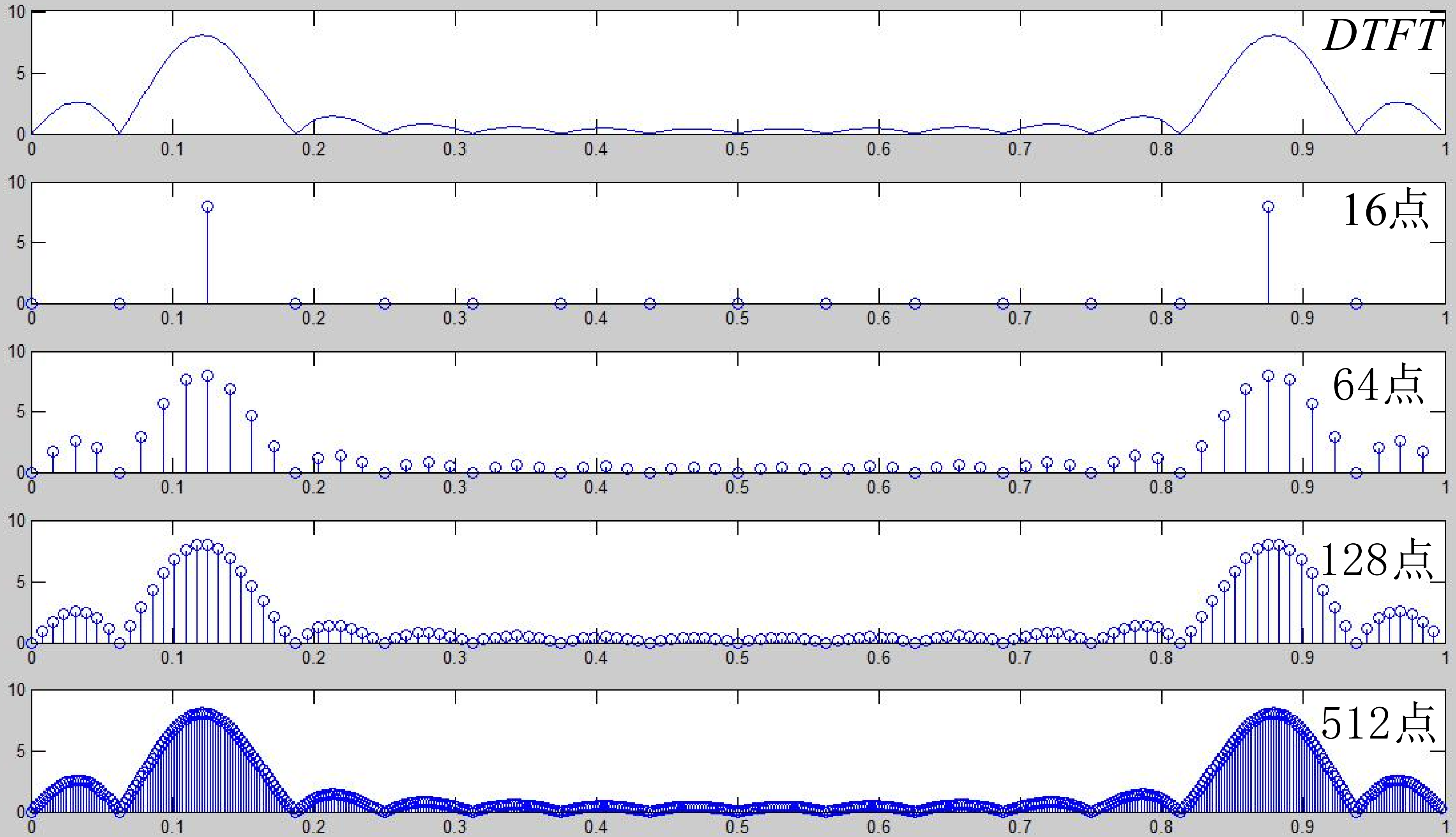
$\therefore G(k)$与$X(k)$ 具有相同的形状，不同之处是$G(k)$的频谱间隔比$X(k)$的小。即通过补零，可以得到更加细致的频谱。

延长序列的DFT

序列x=sin(0.25*pi*n)； n=0:15；

补零到64点，128点，512点，作DFT运算

17?



```
>> n=0:15
x=sin(0.25*pi*n)
L1=0:15
dft_16=fft(x,16)
L2=0:63
dft_64=fft(x,64)
L3=0:127
dft_128=fft(x,128)
L4=0:511
dft_512=fft(x,512)

nx=0:15
K=512
dw=2*pi/K
k=0:511
X=x*exp(j*dw*nx'*k)
subplot(5,1,1)
plot(k*dw/(2*pi),abs(X))

subplot(5,1,2)
stem(L1/16,abs(dft_16))
subplot(5,1,3)
stem(L2/64,abs(dft_64))
subplot(5,1,4)
stem(L3/128,abs(dft_128))
subplot(5,1,5)
stem(L4/512,abs(dft_512))
```

思考：
1.检索“频率分辨力”和“频率分辨率”的区别，或“频率分辨率”的两重含义。

2.从下面仿真，延长序列能否提高频率分辨力？能否提高频率分辨率？

频率分辨力：是指分辨输入信号中两个频率分量最小间隔的能力，即把频率信号区分开来的能力。

注意关于“频率分辨率”的说法有两种含义：
一种是本课本中P101“设F表示频率分量间的增量，它就是前面提到的频率分辨率(F=fs/N)”；
另外一种在很多其他参考书中是这么描述的：“注意：补零不能提高分辨率”。

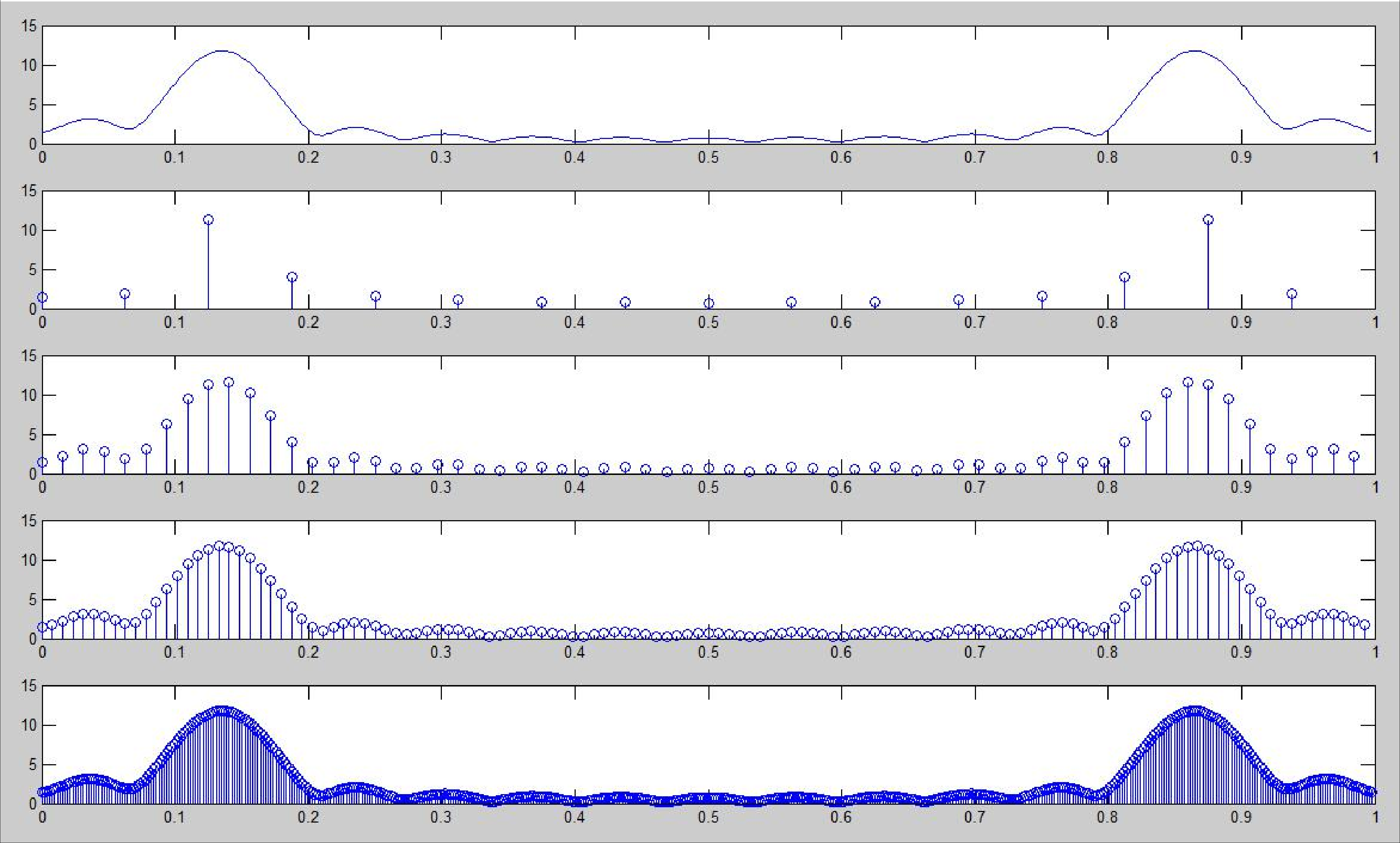
个人建议采用规范说法：“注意：补零不能提高分辨力”。

可以参考“程佩青 《数字信号处理》”第二版P121，有关频率分辨力的描述。

延长序列的DFT

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.30*pi*n)； n=0:15；

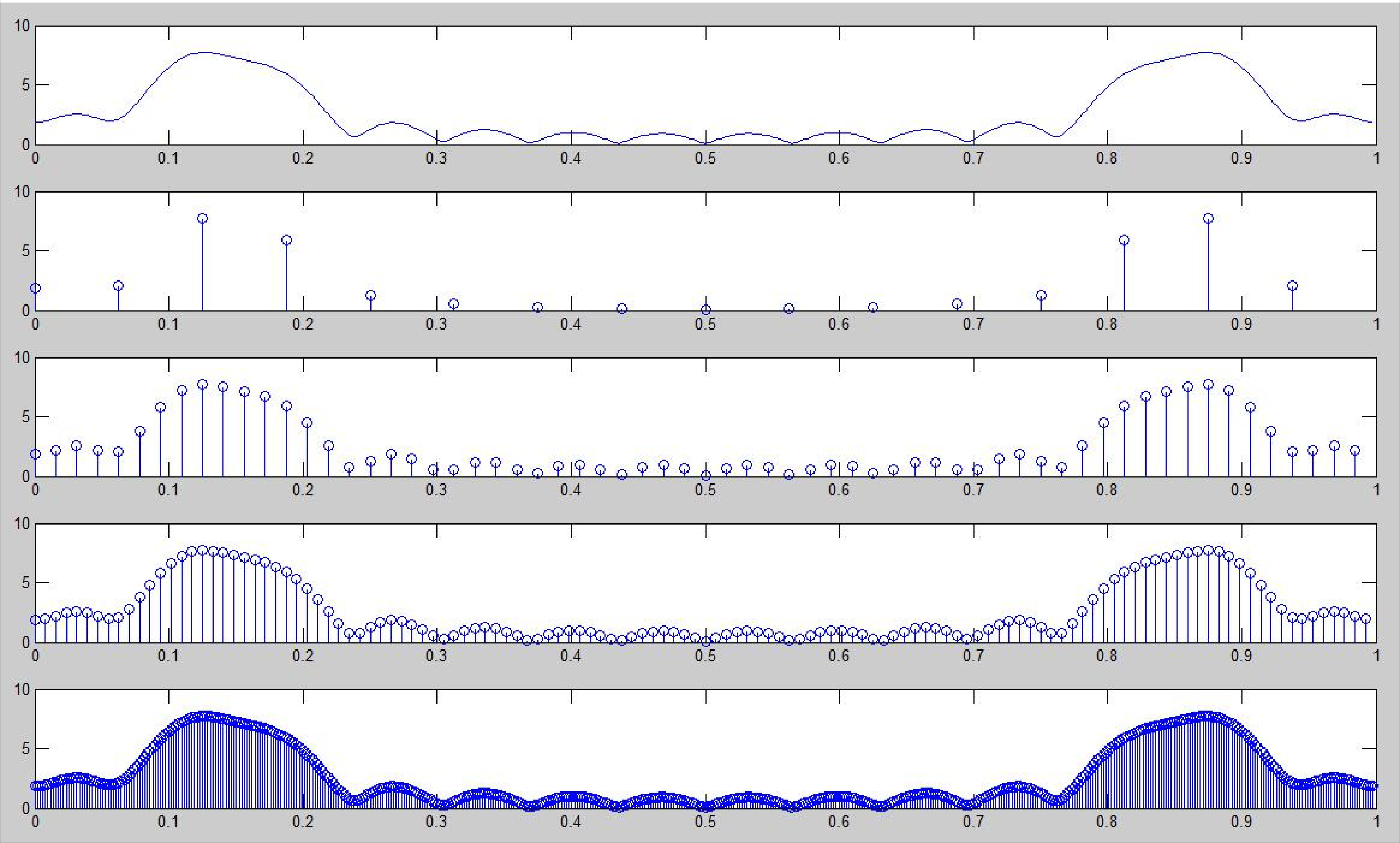
补零到64点，128点，512点，作DFT运算



延长序列的DFT

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.33*pi*n)； n=0:15；

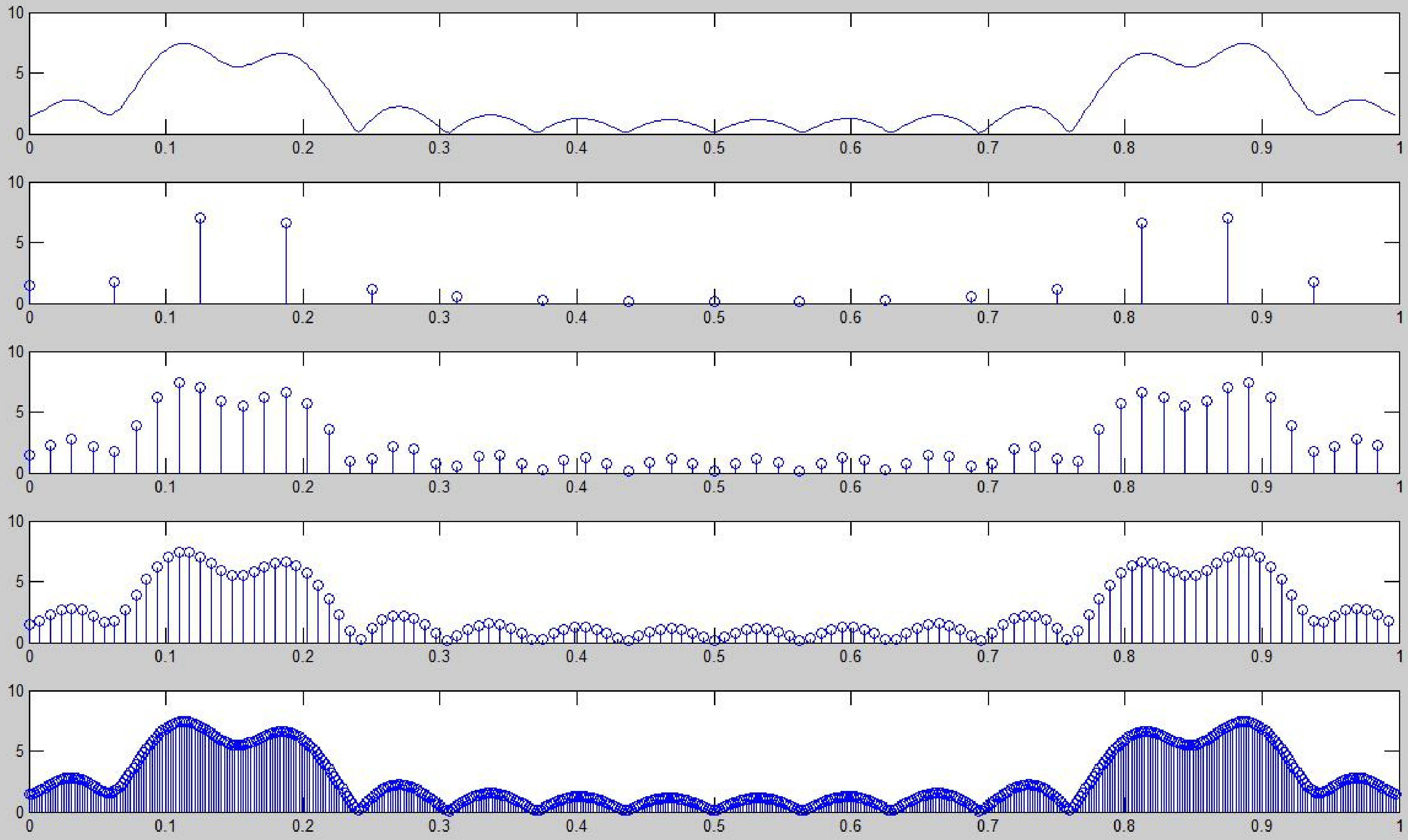
补零到64点，128点，512点，作DFT运算



延长序列的DFT

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.34*pi*n)； n=0:15；

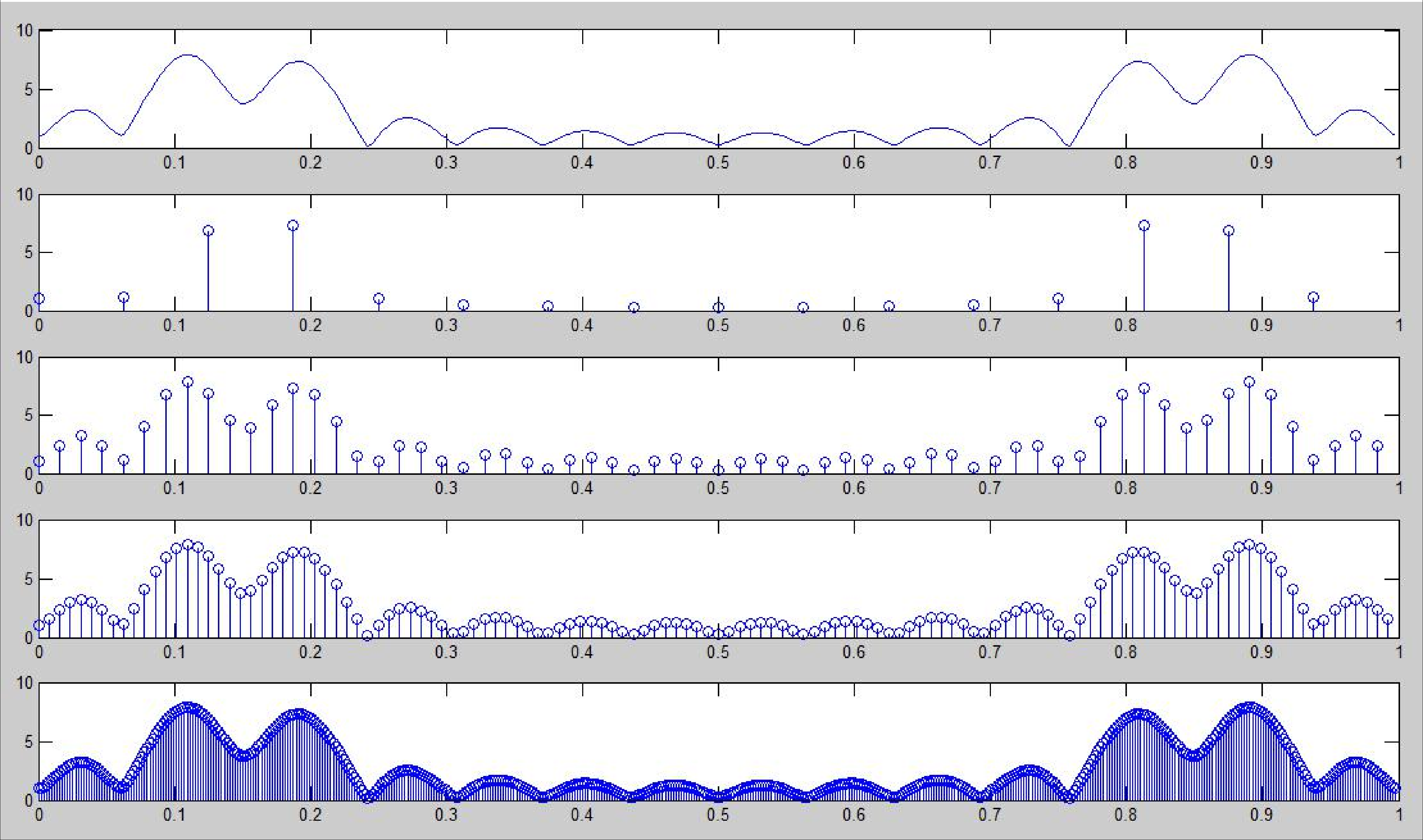
补零到64点，128点，512点，作DFT运算



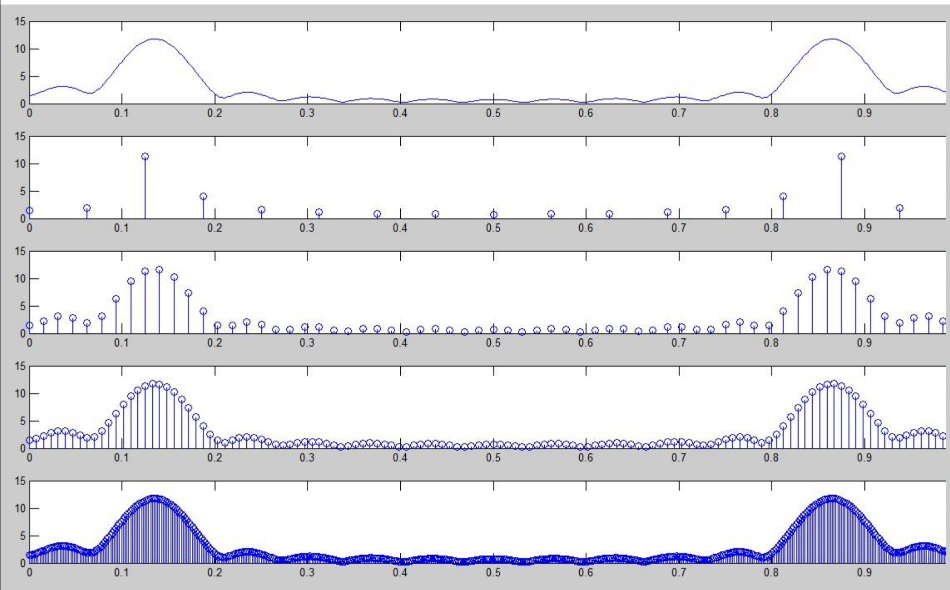
延长序列的DFT

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.35*pi*n)； n=0:15；

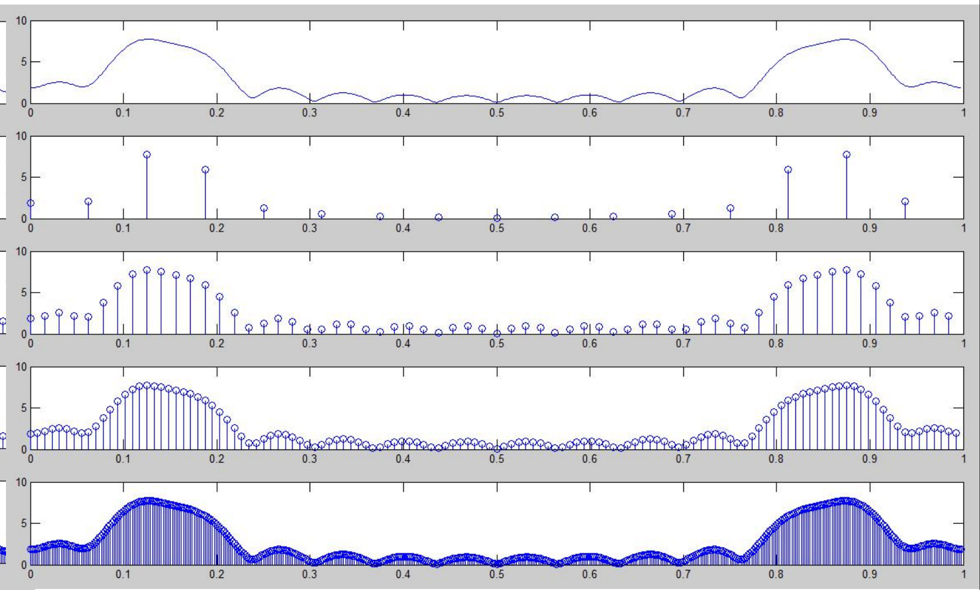
补零到64点，128点，512点，作DFT运算



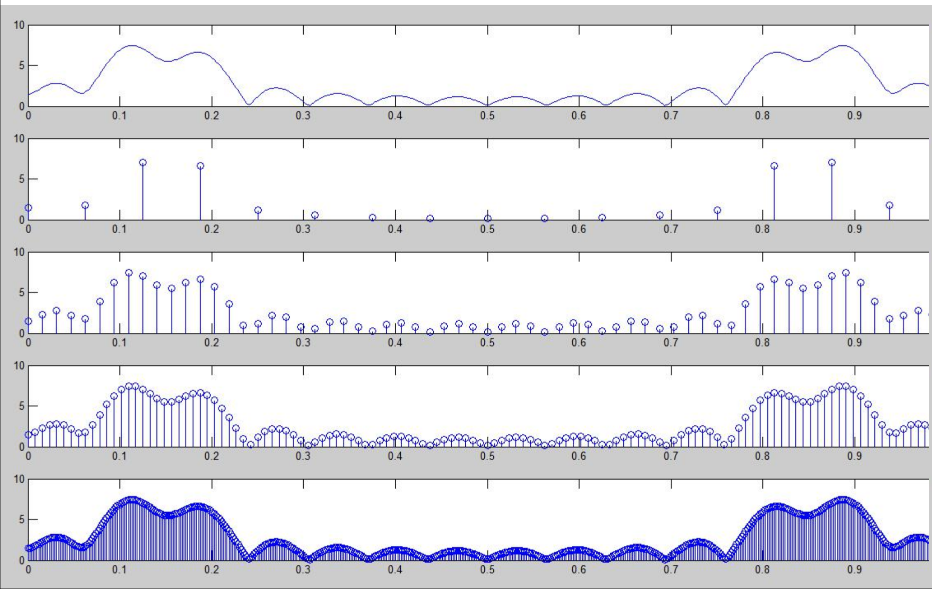
x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.30*pi*n)



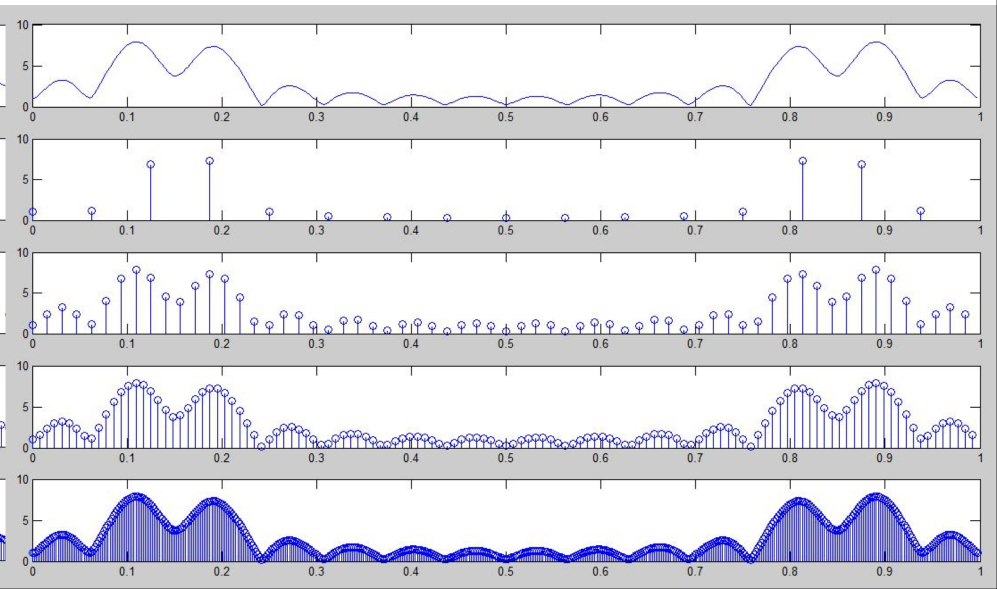
x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.33*pi*n)



x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.34*pi*n)



x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.35*pi*n)



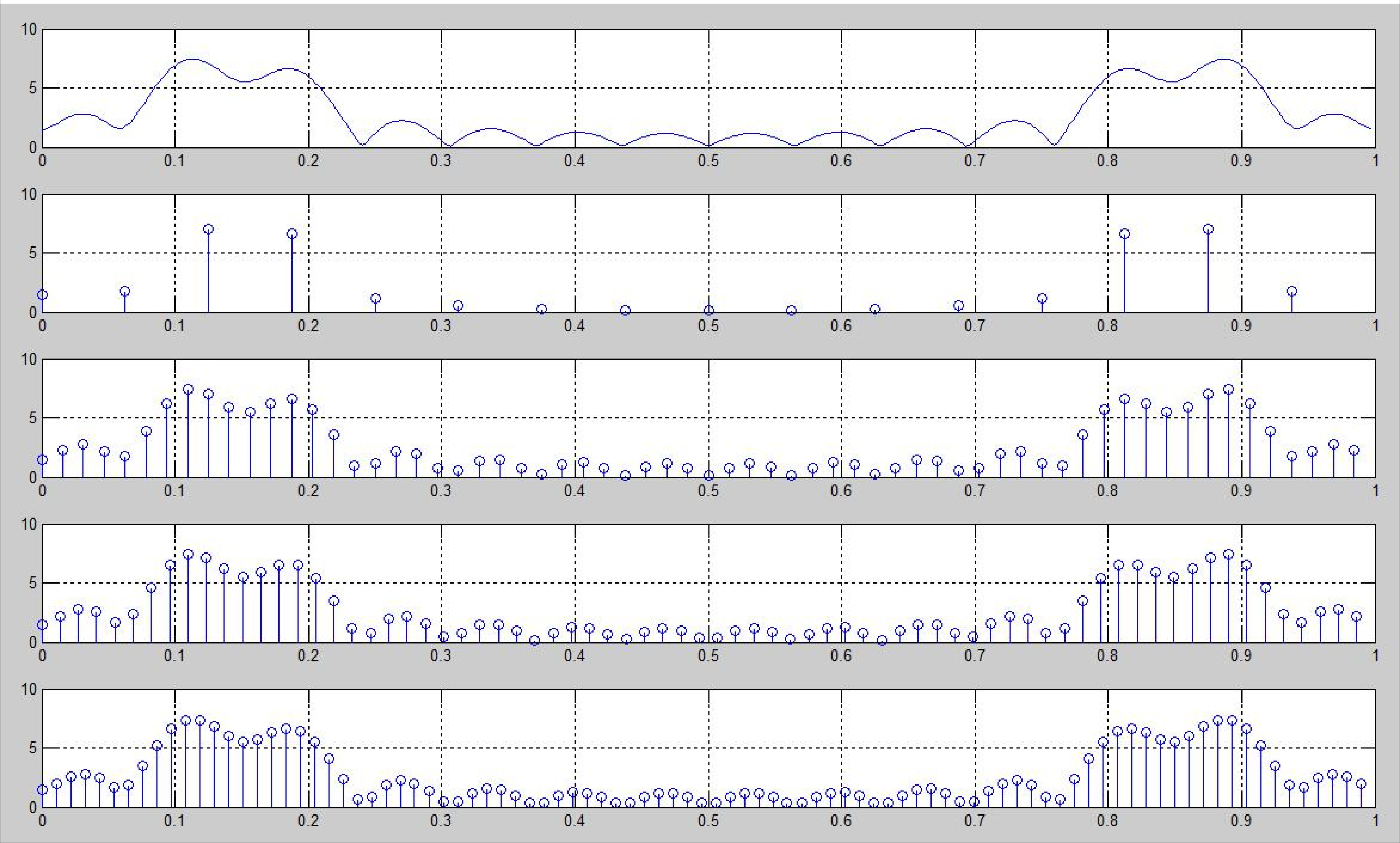
matlab参考程序：

```
n=0:15
x=sin(0.25*pi*n)+sin(0.34*pi*n)
L1=0:15
dft_16=fft(x,16)
L2=0:63
dft_64=fft(x,64)
L3=0:127
dft_128=fft(x,128)
L4=0:511
dft_512=fft(x,512)

nx=0:15
K=512
dw=2*pi/K
k=0:511
X=x*exp(j*dw*nx'*k)
subplot(5,1,1)
plot(k*dw/(2*pi),abs(X))

subplot(5,1,2)
stem(L1/16,abs(dft_16))
subplot(5,1,3)
stem(L2/64,abs(dft_64))
subplot(5,1,4)
stem(L3/128,abs(dft_128))
subplot(5,1,5)
stem(L4/512,abs(dft_512))
```

延长序列的DFT　　　　　　(不是N的整数次幂)

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.35*pi*n)； n=0:15；

补零到64点，73点，93点，作DFT运算



习题集P47-12

12 已知 $x(n)$ 是长为 N 点的有限长序列，$X(k)=DFT[x(n)]$现将$x(n)$的每两点之间补进 $r-1$ 个零值点,得到一个长为 rN 点的有限长度序列 $y(n)$，$y(n)=\begin{cases} x(n/r), & n=ir, \quad 0\le i<N \\ 0, & 其他\ n \end{cases}$

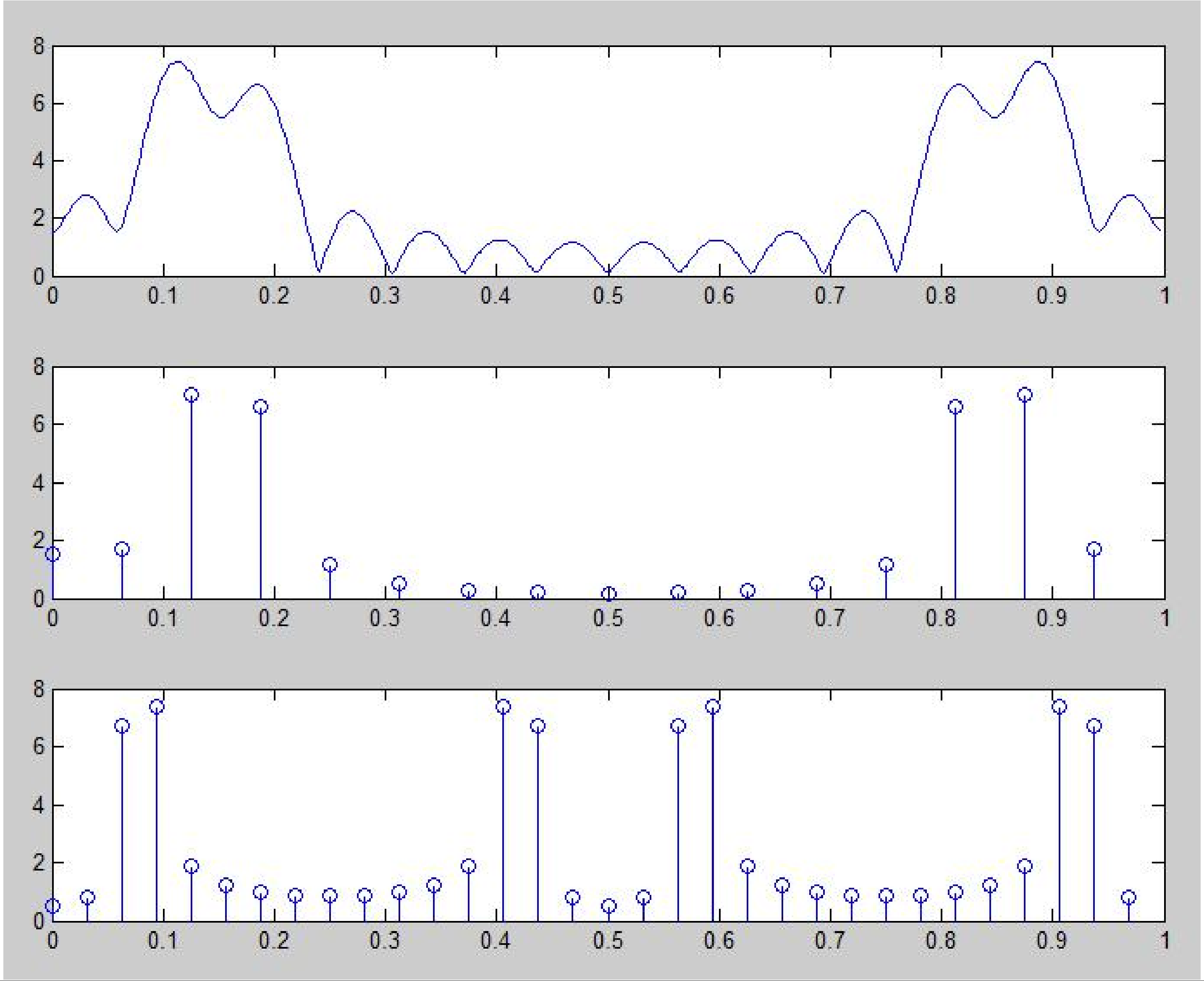
试求 rN 点 $DFT[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

仿真如下：r=2;r=4

插值序列的DFT

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.34*pi*n)； n=0:15；16点DFT运算

(序列n为奇y=x； n为偶y=0；16点DFT运算)

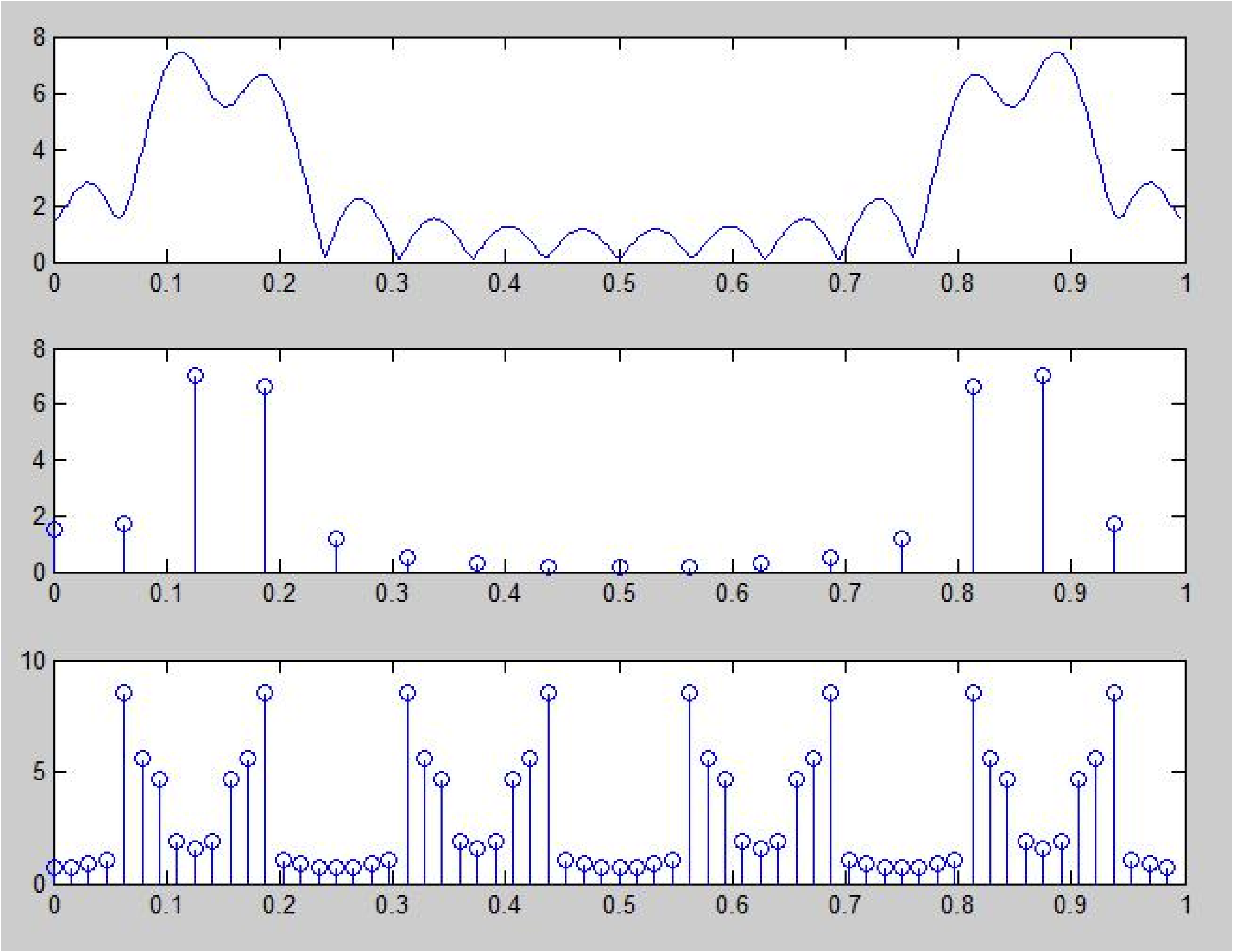


```
%插值序列DFT
n=0:15
x=sin(0.25*pi*n)+sin(0.34*pi*n)

L1=0:15
dft_16=fft(x,16)

for m=1:32
if mod(m,2)==0
    y(m) = sin(0.25*pi*m/2)+sin(0.34*pi*m/2)
else
    y(m)=0
end
end

Ly=0:31
dft_y=fft(y,32)

nx=0:15
K=512
dw=2*pi/K
k=0:511
X=x*exp(j*dw*nx'*k)
subplot(3,1,1)
plot(k*dw/(2*pi),abs(X))

subplot(3,1,2)
stem(L1/16,abs(dft_16))
subplot(3,1,3)
stem(Ly/32,abs(dft_y))
```

插值序列的DFT

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.34*pi*n) ； n=0:15；16点DFT运算

(序列mod(n,4)=0时y=x； 其余y=0；16点DFT运算)



```
%插值序列DFI 02
n=0:15
x=sin(0.25*pi*n)+sin(0.34*pi*n)

L1=0:15
dft_16=fft(x,16)

for m=1:64
if mod(m,4)==0
    y(m) = sin(0.25*pi*m/2)+sin(0.34*pi*m/2)
else
    y(m)=0
end
end

Ly=0:63
dft_y=fft(y,64)

nx=0:15
K=512
dw=2*pi/K
k=0:511
X=x*exp(j*dw*nx'*k)
subplot(3,1,1)
plot(k*dw/(2*pi),abs(X))

subplot(3,1,2)
stem(L1/16,abs(dft_16))
subplot(3,1,3)
stem(Ly/64,abs(dft_y))
```

问题1：
序列DFT运算后，中间几个点模值比较大，能否直接置零实现低通滤波？

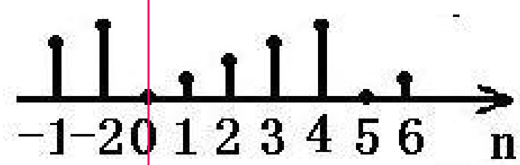
§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

8.圆周移位定理

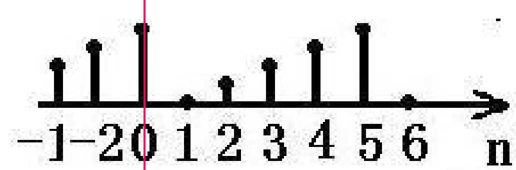
（1）圆周移位

$$\forall x(n), 0 \le n \le N-1$$

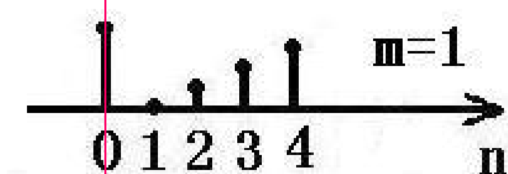
$$\tilde{x}(n) = x((n))_N$$

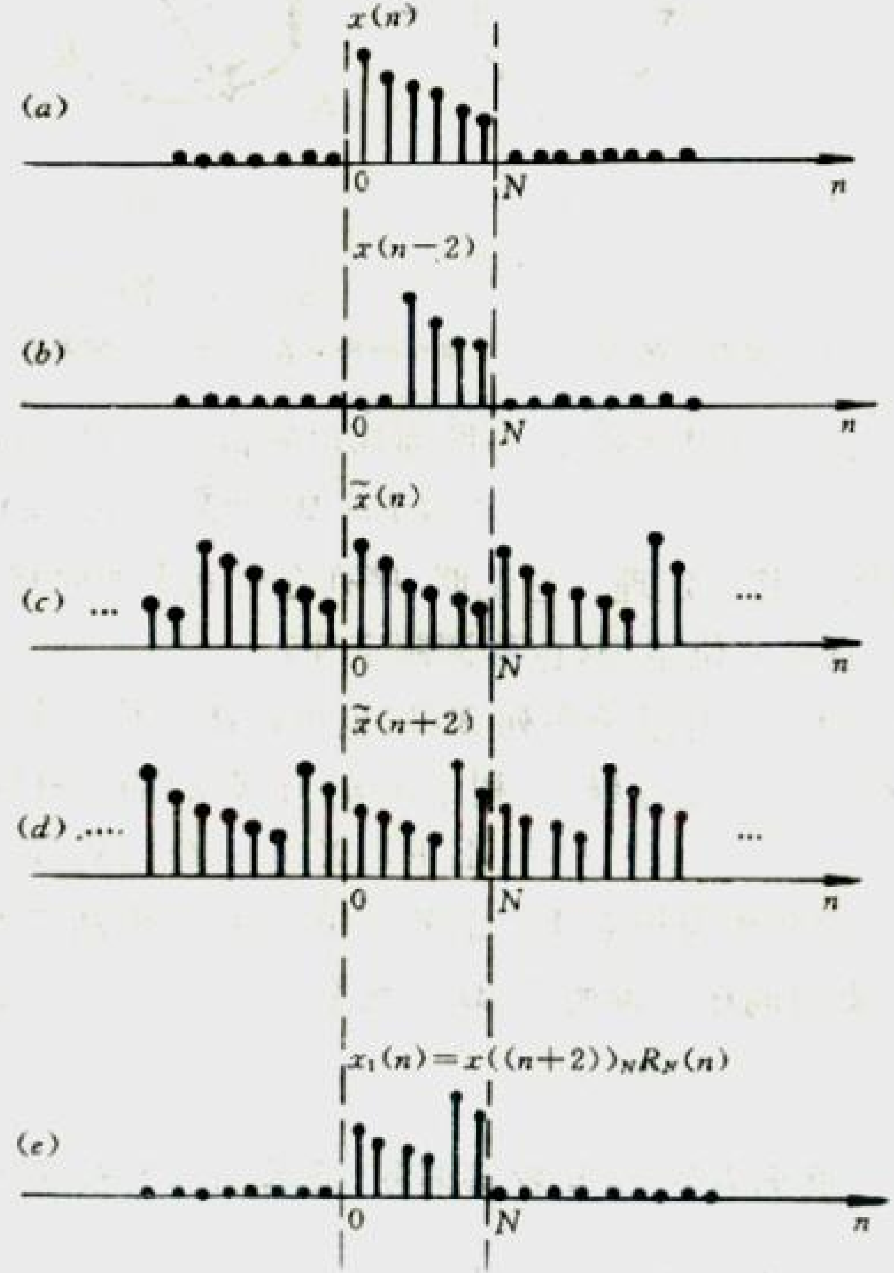


$$\tilde{x}(n-m) = x((n-m))_N$$



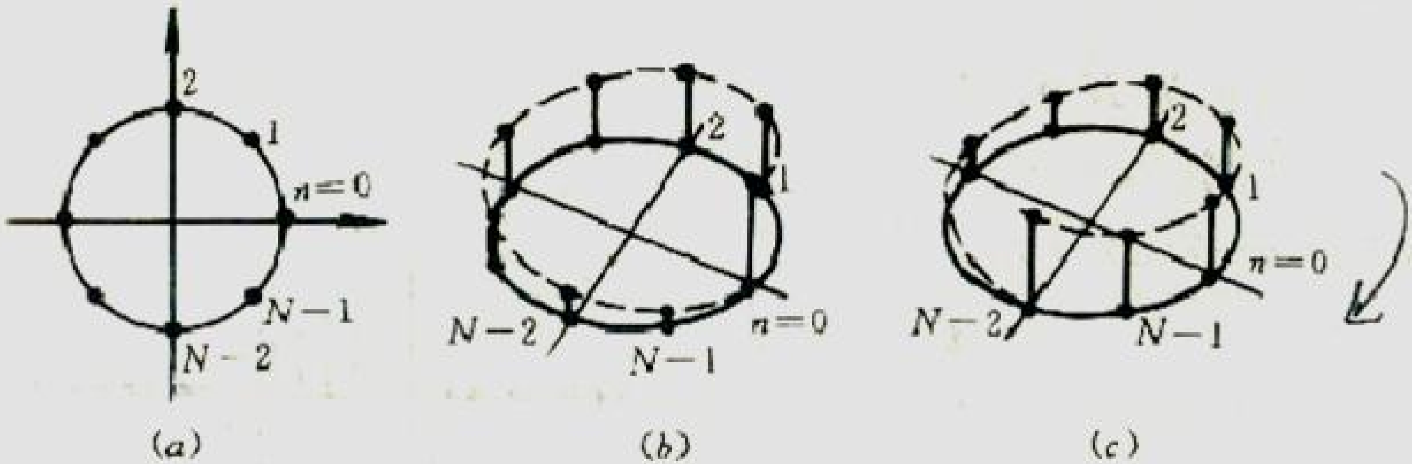
$$x_1(n) = x((n-m))_N R_N(n)$$





$x(n)$
(a)
0
N
n
$x(n-2)$
(b)
0
N
n
$\tilde{x}(n)$
(c) …
…
0
N
n
$\tilde{x}(n+2)$
(d) ….
…
0
N
n
$x_1(n)=x((n+2))_N R_N(n)$
(e)
0
N
n

图 3－7　圆周移位过程图



顺时针旋转

图 3—8 序列的圆周移位

(a) N 等分的圆周 (b) 将序列排列在 N 等分的圆周上 (c) 令圆周旋转得序列 $x(n)$ 的圆周移位

立体展示，有助理解

§3-5 离散傅里叶变换的性质

圆周移位计算，习题集：P38-4

已知序列$x(n)=\{1,1,3,2\}$，画出

$(a)x((-n))_5$

$(b)x((-n))_6 R_6(n)$

$(c)x((n))_3 R_3(n)$

$(d)x((n))_6$

$(e)x((n-3))_5 R_5(n)$

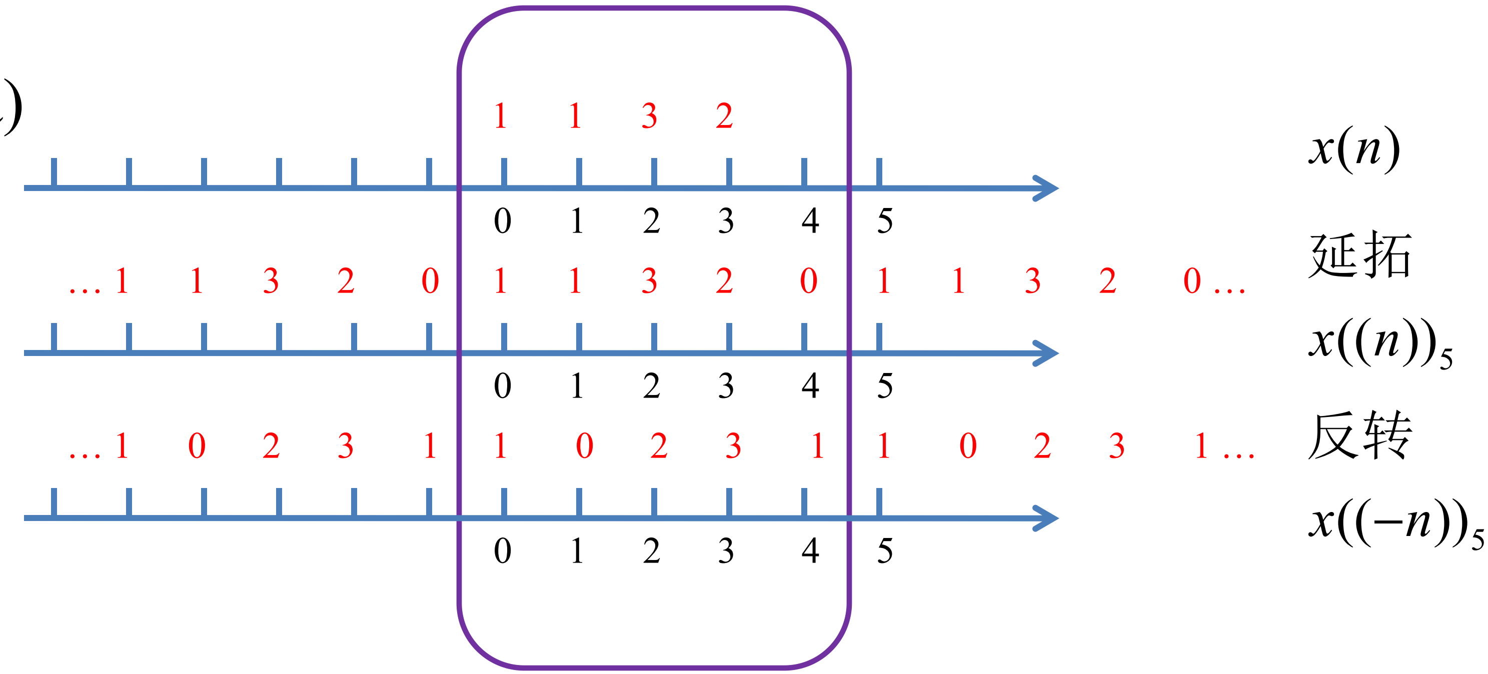
$(f)x((n))_7 R_7(n)$

已知序列$x(n)=\{1,1,3,2\}$，画出

$(a)x((-n))_5$ $(b)x((-n))_6R_6(n)$ $(c)x((n))_3R_3(n)$

$(d)x((n))_6$ $(e)x((n-3))_5R_5(n)$ $(f)x((n))_7R_7(n)$

(a)

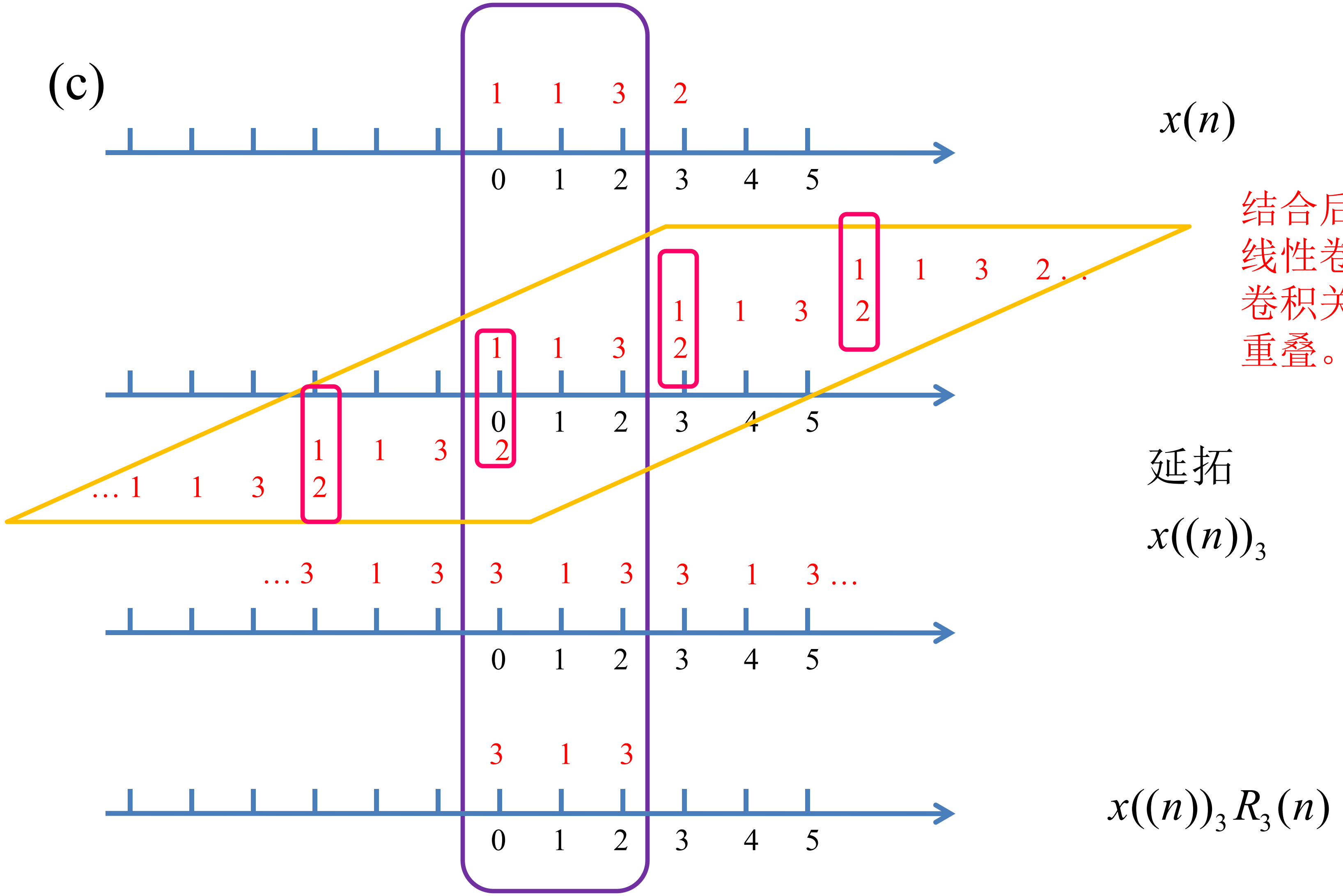


已知序列$x(n)=\{1,1,3,2\}$，画出

$(a)x((-n))_5$　$(b)x((-n))_6 R_6(n)$　$(c)x((n))_3 R_3(n)$

$(d)x((n))_6$　$(e)x((n-3))_5 R_5(n)$　$(f)x((n))_7 R_7(n)$

(c)



结合后面讲到的线性卷积和圆周卷积关系来理解重叠。

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

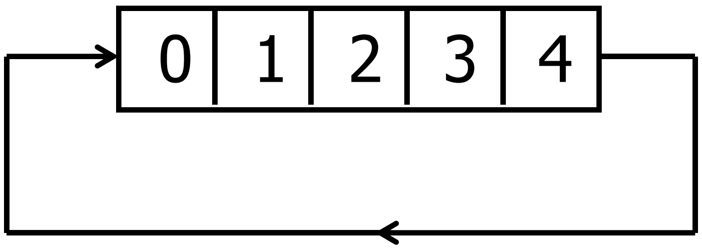
（2）时间移位定理

由DFS的性质（3－21）式：

$$若\tilde{x}(n)\xleftrightarrow{DFS}\tilde{X}(k),则\tilde{x}(n-m)\xleftrightarrow{DFS}W_N^{mk}\tilde{X}(k)$$

右移m $\qquad \tilde{X}_1(k)=W_N^{km}\tilde{X}(k)$

$$\therefore X_1(k)=\tilde{X}_1(k)R_N(k)$$
$$=W_N^{km}\tilde{X}(k)R_N(k)$$
$$=W_N^{km}X(k)$$



循环移位

$$x_1(n)\overset{\triangle}{=}x((n-m))_N R_N(n)\leftrightarrow W_N^{km}X(k)$$

注意与（3－46）式比较

书上是左移

§3-5 离散傅里叶变换的性质

（3）频率移位定理

$$\forall x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$$

由DFS的性质（3－22）式：

若$\tilde{X}(k) \xleftrightarrow{IDFS} \tilde{x}(n)$, 则$\tilde{X}(k-l) \xleftrightarrow{IDFS} W_N^{-nl}\tilde{x}(n)$

$$\widetilde{X}(k-l) \xleftrightarrow{DFS} W_N^{-nl}\widetilde{x}(n)$$

$$\therefore X_2(k) \triangleq \tilde{X}(k-l)R_N(k) \xrightarrow{DFT} W_N^{-nl}\tilde{x}(n)R_N(n)$$

$$= W_N^{-nl}x(n)$$

$$= x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}nl}$$

$$\therefore X_2(k) \stackrel{\triangle}{=} X\big((k-l)\big)_N R_N(k) \xleftrightarrow{DFT} W_N^{-nl}x(n)$$

注意与（3－47）式的区别

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

9.圆周卷积（循环卷积）

（1）时域圆周卷积定理

由DFS的性质（3－23）式：

$$\tilde{X}_3(k)=\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$$

$\updownarrow$ DFS　　$\updownarrow$ DFS

循环卷积

$$\tilde{x}_3(n)=\tilde{x}_1(n)\,\widetilde{\otimes}\,\tilde{x}_2(n)=IDFS\left[\tilde{X}_3\left(k\right)\right]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

$$\therefore X_3(k) = \widetilde{X}_3(k)R_N(k)$$

$$= \widetilde{X}_1(k)\widetilde{X}_2(k)R_N(k)$$

$$= X_1(k)X_2(k)$$

$$x_3(n) = \widetilde{x}_3(n)R_N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)R_N(n)$$

$$= \left[\boxed{\sum_{m=0}^{N-1} x_1\left((m)\right)_N} x_2\left((n-m)\right)_N\right] R_N(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)\boxed{x_2\left((n-m)\right)_N R_N(n)}$$

$$= x_1(n) \otimes x_2(n)$$

注意n m
自变量
作用域

$$\therefore X_1(k)X_2(k) \xleftrightarrow{DFT} x_1(n) \otimes x_2(n)$$

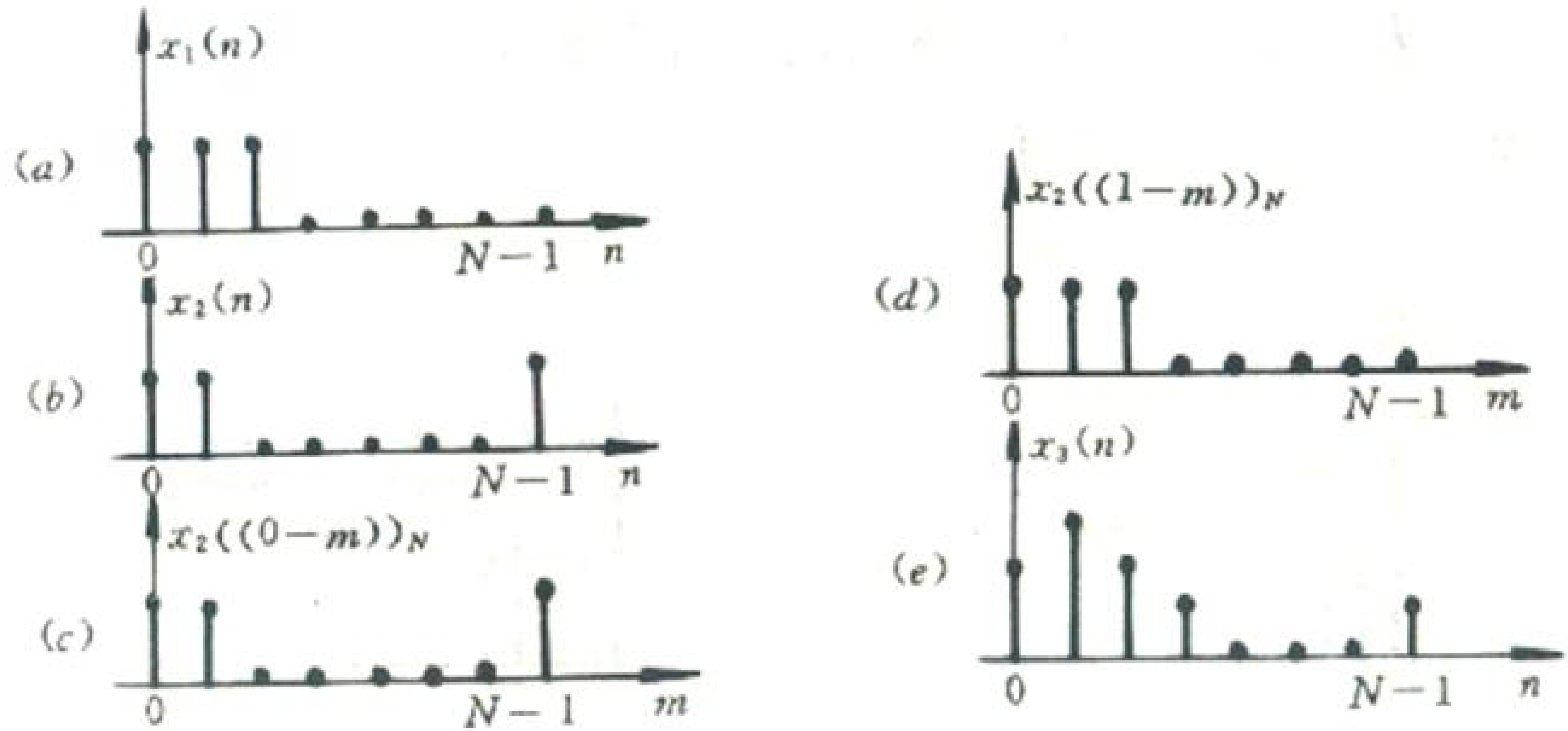


图 3-9 圆周卷积

(a) 序列 $x_1(n)$ (b) 序列 $x_2(n)$ (c) $x_2((0-m))_N$ (d) $x_2((1-m))_N$ (e) 序列 $x_3(n)$

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

（2）频域圆周卷积

$$x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k)$$

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

（3）圆周卷积与线性卷积的关系

$$\forall x_1(n), 0 \le n \le N-1$$

$$x_2(n), 0 \le n \le M-1, M \le N$$

$$\otimes: \quad x_c(n) \overset{\triangle}{=} x_1(n) \otimes x_2(n), 0 \le n \le N-1$$

$$*: \quad x(n) \overset{\triangle}{=} x_1(n) * x_2(n), 0 \le n \le N+M-2$$

如何使 $x(n) = x_c(n)$ ？

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

如何使 $x(n)=x_c(n)$ ？

i）长度相同

令 $L=N+M-1$

$$x_1'(n)=\begin{cases}x_1(n) & 0\le n\le N-1\\ 0 & N\le n\le L-1\end{cases}\qquad x_2'(n)=\begin{cases}x_2(n) & 0\le n\le N-1\\ 0 & N\le n\le L-1\end{cases}$$

$$x_c'(n)=x_1'(n)\otimes x_2'(n),\quad 0\le n\le L-1$$

$$x(n)=x_1(n)*x_2(n),\quad 0\le n\le L-1$$

ii）取值相同

令 $\widetilde{x}_1(n)\overset{\triangle}{=}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}x_1'(n+qL)=x_1'((n))_L$

周期延拓

$$\widetilde{x}_2(n)\overset{\triangle}{=}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}x_2'(n+pL)=x_2'((n))_L$$

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

$$\tilde{x}_L(n) \overset{\triangle}{=} \tilde{x}_1(n) \widetilde{\otimes} \tilde{x}_2(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

$$= \sum_{m=0}^{L-1} x_1'(m) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_2'(n-m+pL)$$

交换次序

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x_1'(m) x_2'(n+pL-m)$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n+pL-m)$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(n+pL)$$

以L为周期的周期延拓

$$\therefore x_c'(n) = \tilde{x}_L(n) R_L(n)$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(n+pL) R_L(n)$$

$$= x(n)$$

取主值区间

$\therefore$ 当 $L = N + M - 1$

或 $0 \le N \le L-1$ / $0 \le N \le N+M-2$ 时

$$x_1(n) * x_2(n) = x_1'(n) \otimes x_2'(n)$$

由上述推导不难看出

$$\forall L \ge N + M - 1$$

$$x_1'(n) \otimes x_2'(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

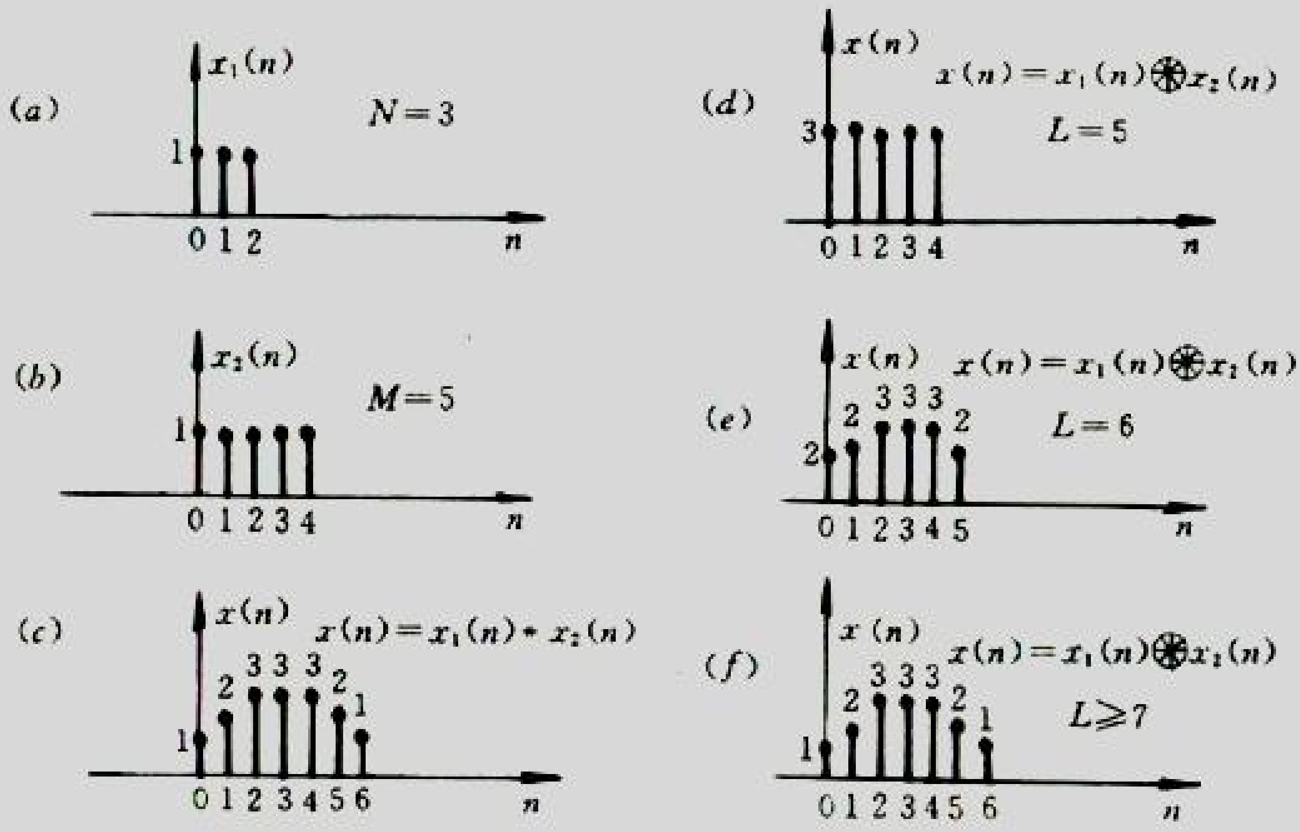


图 3—10 圆周卷积与线性卷积

(a) 序列 $x_1(n)$ (b) 序列 $x_2(n)$ (c) 序列 $x_1(n)$与 $x_2(n)$的线性卷积结果 (d) $x_1(n)$与 $x_2(n)$的列长 $L=5$ 的圆周卷积 (e) $x_1(n)$与 $x_2(n)$的列长 $L=6$ 的圆周卷积 (f) $x_1(n)$与 $x_2(n)$的列长 $L\geqslant 7$ 的圆周卷积

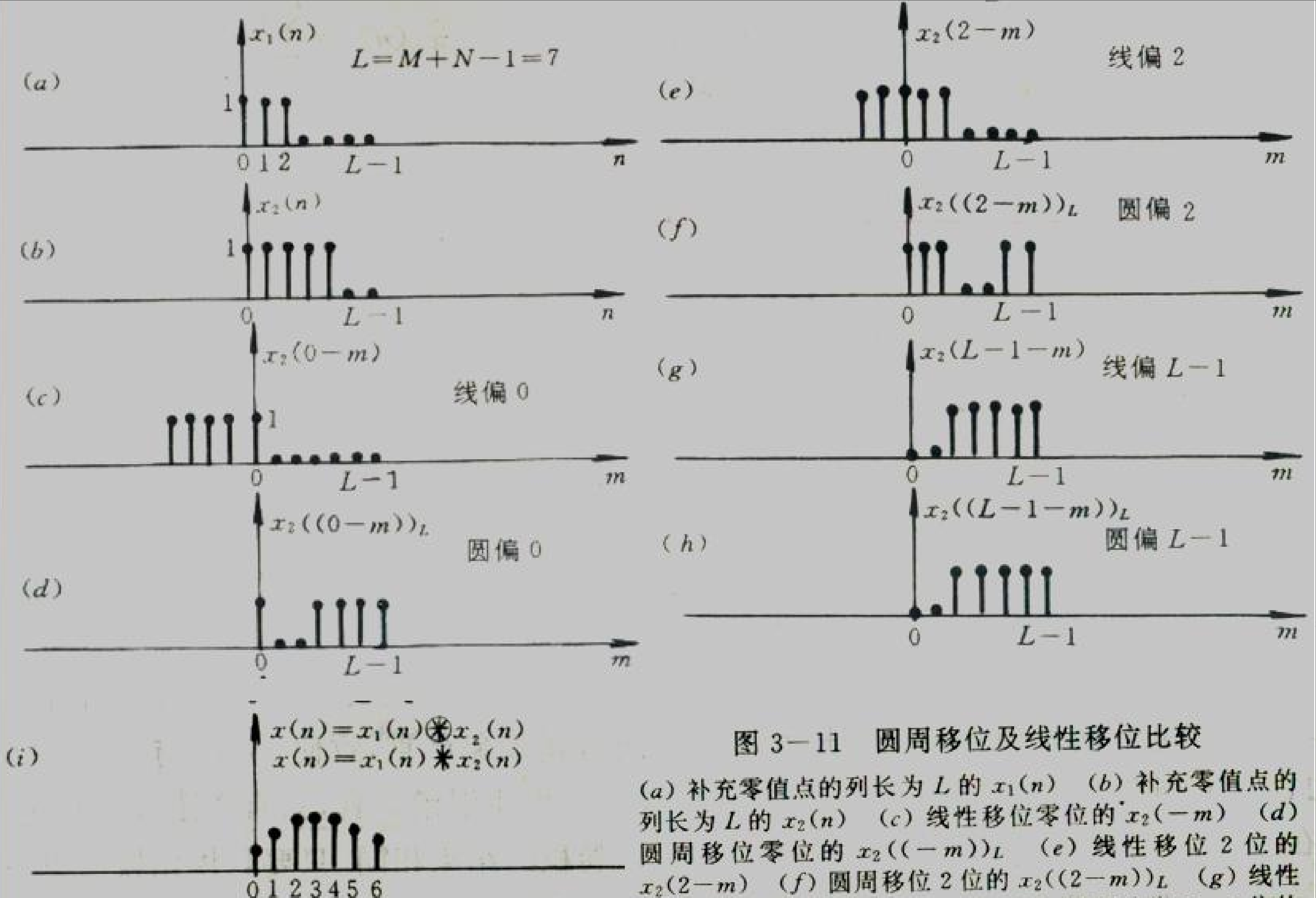


图 3—11　圆周移位及线性移位比较

(a) 补充零值点的列长为 L 的 $x_1(n)$　(b) 补充零值点的列长为 L 的 $x_2(n)$　(c) 线性移位零位的 $x_2(-m)$　(d) 圆周移位零位的 $x_2((-m))_L$　(e) 线性移位 2 位的 $x_2(2-m)$　(f) 圆周移位 2 位的 $x_2((2-m))_L$　(g) 线性移位 $L-1$ 位的 $x_2(L-1-m)$　(h) 圆周移位 $L-1$ 位的 $x_2((L-1-m))_L$　(i) 线性卷积与圆周卷积相等的 $x(n)$

§3-5 离散傅里叶变换的性质

圆周卷积计算方法小结：

1，哑元坐标

2，周期延拓

3，反转

4，周期移位，相乘相加

例题：

历年考试真题

已知两个时间序列$u(n)=\{0,1,2,1,0\}$和$v(n)=\{0,1,0,1,0\}$

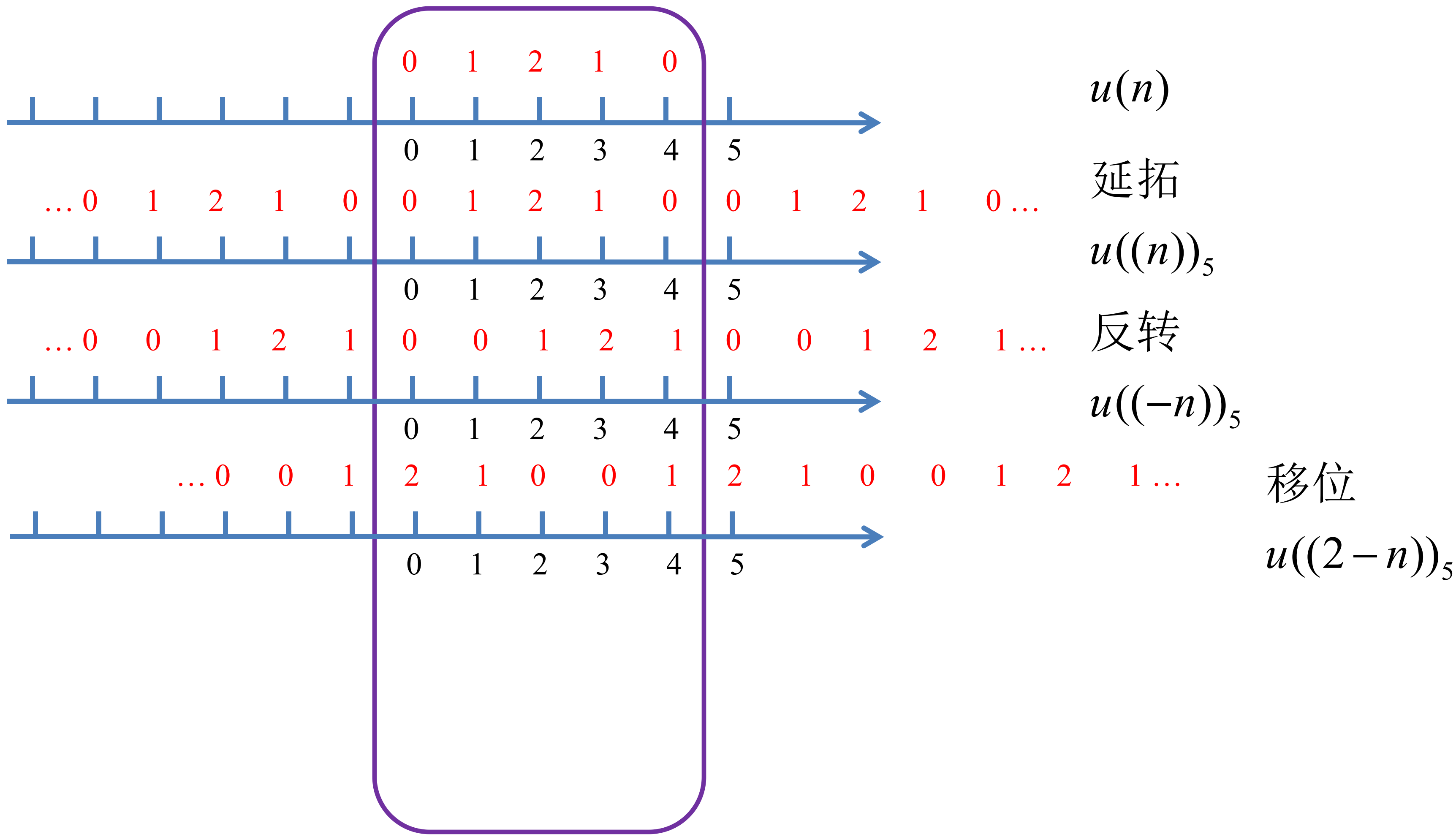
(a)画出$x(n)=u((2-n))_5R_5(n)$的图形

(b)求序列$u(n)$和$v(n)$的线性卷积

(c)求序列$u(n)$和$v(n)$的5点圆周卷积

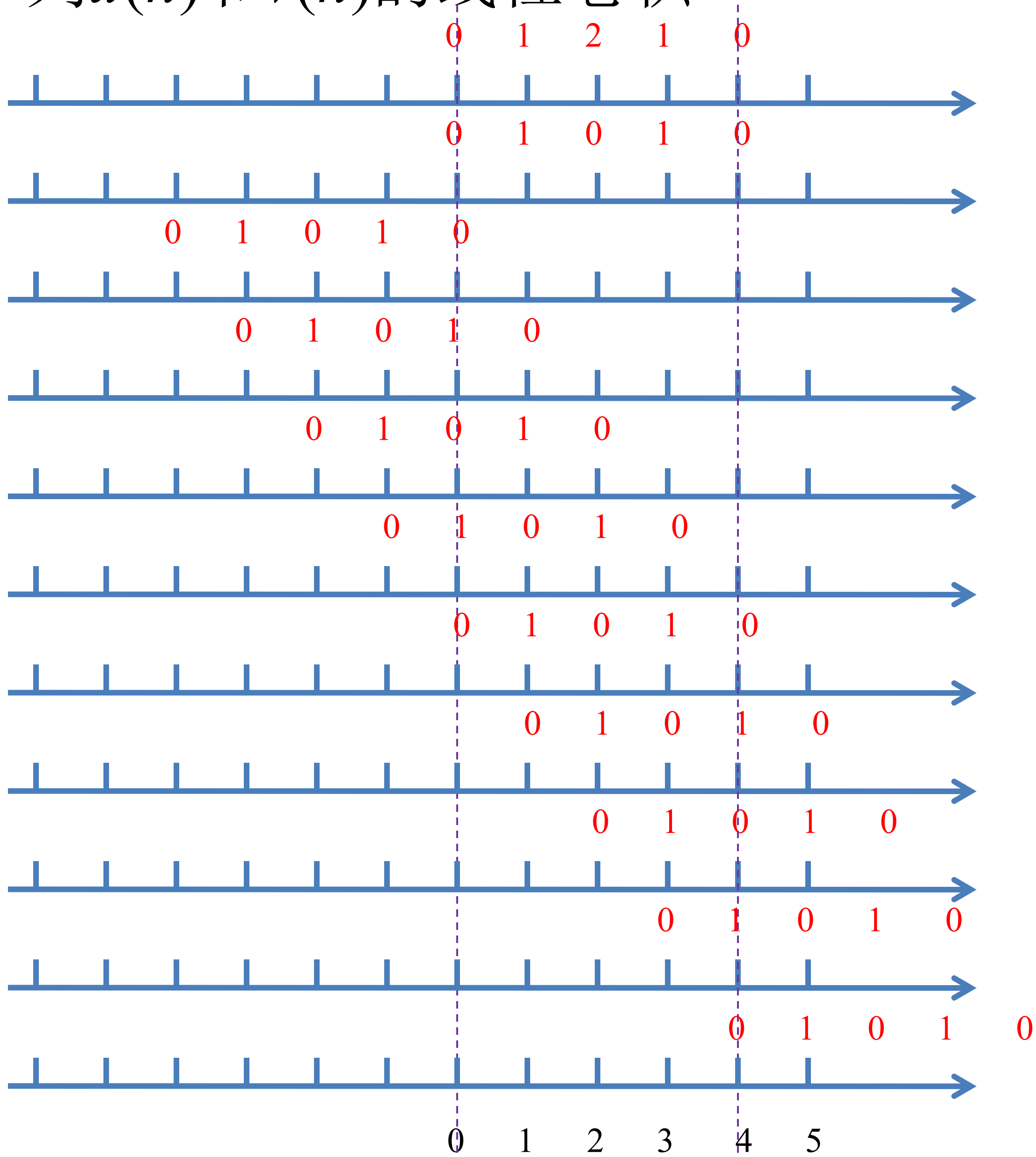
已知两个时间序列$u(n)=\{0,1,2,1,0\}$和$v(n)=\{0,1,0,1,0\}$

(a)画出$x(n)=u((2-n))_5R_5(n)$的图形



已知两个时间序列$u(n)=\{0,1,2,1,0\}$和$v(n)=\{0,1,0,1,0\}$

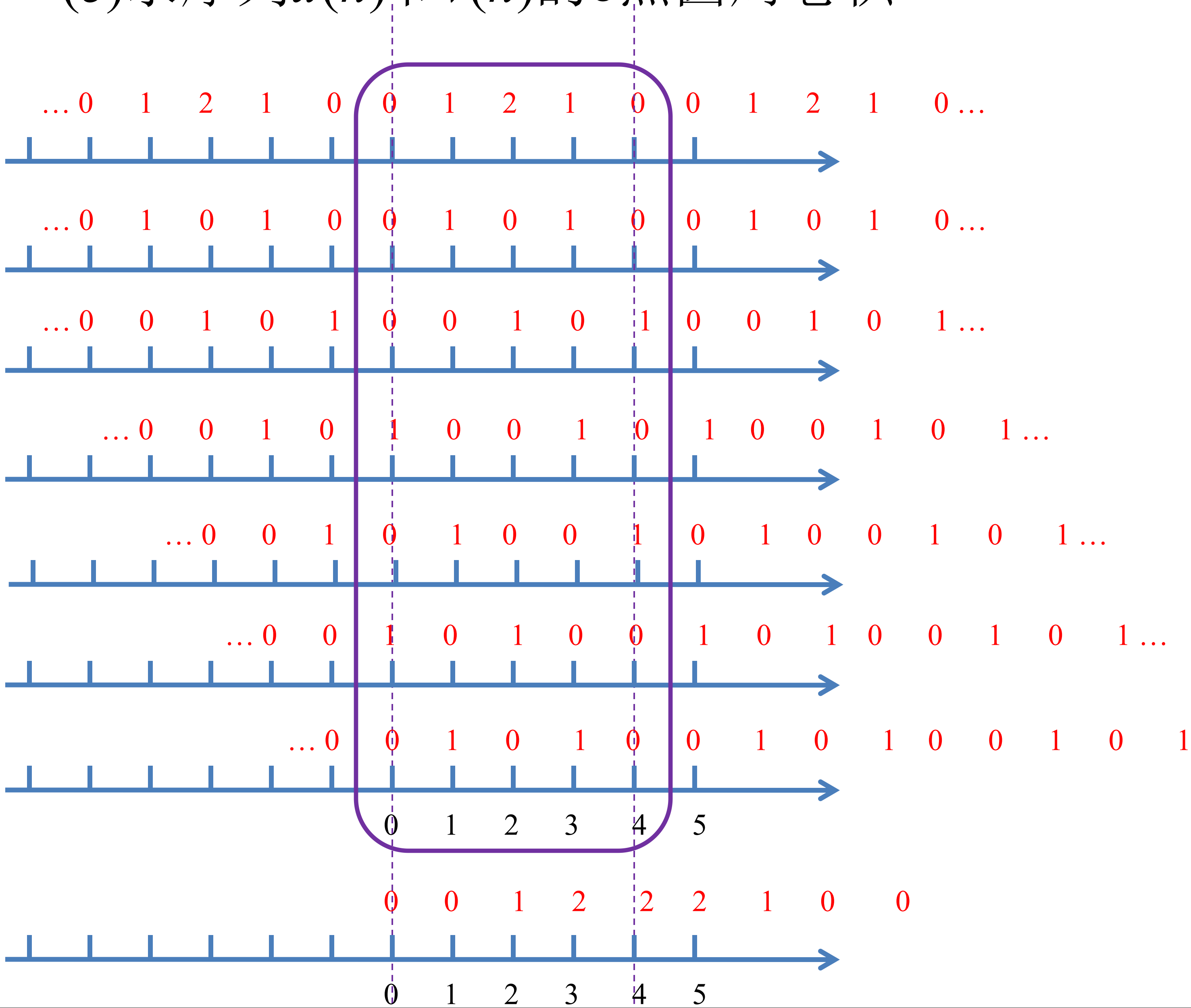
(b)求序列$u(n)$和$v(n)$的线性卷积



$u(m)$	
$v(m)$	
$v(-m)$	0
$v(1-m)$	0
$v(2-m)$	1
$v(3-m)$	2
$v(4-m)$	2
$v(5-m)$	2
$v(6-m)$	1
$v(7-m)$	0
$v(8-m)$	0

已知两个时间序列$u(n)=\{0,1,2,1,0\}$和$v(n)=\{0,1,0,1,0\}$

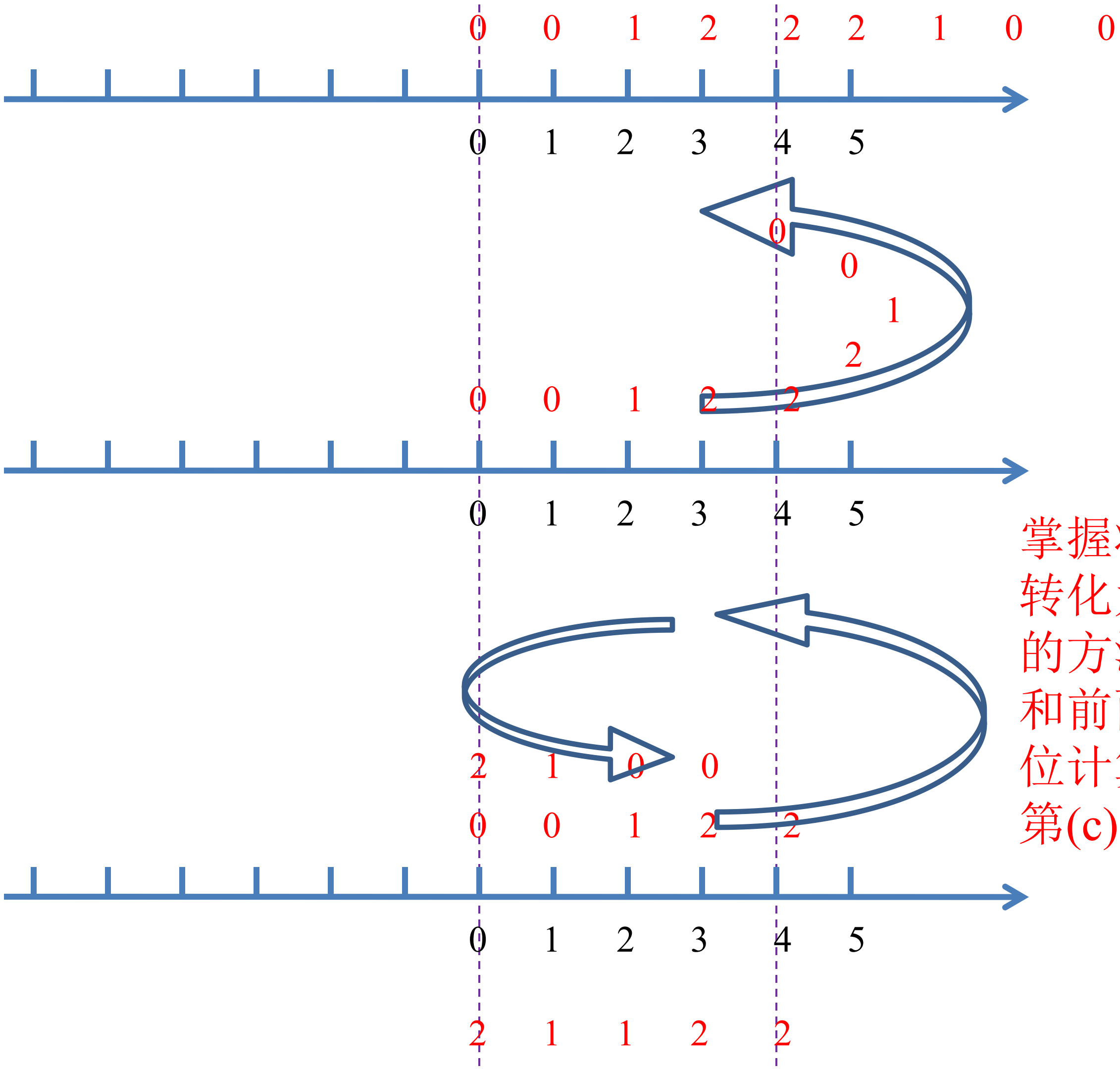
(c)求序列$u(n)$和$v(n)$的5点圆周卷积



$u((m))_5$	
$v((m))_5$	
$v((-m))_5$	2
$v((1-m))_5$	1
$v((2-m))_5$	1
$v((3-m))_5$	2
$v((4-m))_5$	2

已知两个时间序列$u(n)=\{0,1,2,1,0\}$和$v(n)=\{0,1,0,1,0\}$

(c)求序列$u(n)$和$v(n)$的5点圆周卷积



掌握将L点线性卷积转化为N点圆周卷积的方法。
和前面讲到的圆周移位计算(习题集P38-4第(c)问)结合理解。

$u((m))_5$	
$v((m))_5$	
$v((-m))_5$	2
$v((1-m))_5$	1
$v((2-m))_5$	1
$v((3-m))_5$	2
$v((4-m))_5$	2