

# 数字信号处理实验教程

## (基于 MATLAB 语言)

范哲意 编



北京理工大学  
信号与图像处理研究所

二〇一四年十一月

## 目 录

实验 1 利用 DFT 分析信号频谱.....	1
一、实验目的.....	1
二、实验设备与环境.....	1
三、实验基础理论.....	1
四、实验内容.....	3
五、实验报告要求.....	4
实验 2 利用 FFT 计算线性卷积.....	5
一、实验目的.....	5
二、实验设备与环境.....	5
三、实验基础理论.....	5
四、实验内容.....	8
五、实验报告要求.....	8
实验 3 IIR 数字滤波器设计.....	9
一、实验目的.....	9
二、实验设备与环境.....	9
三、实验基础理论.....	9
四、实验内容.....	9
五、实验报告要求.....	9
实验 4 FIR 数字滤波器设计.....	10
一、实验目的.....	10
二、实验设备与环境.....	10
三、实验基础理论.....	10
四、实验内容.....	10
五、实验报告要求.....	11
附录 1 IIR 数字滤波器设计方法概述.....	12
1. 数字滤波器和模拟滤波器的一些指标.....	12
2. 模拟原型滤波器.....	13
2.1 巴特沃斯滤波器.....	13
2.2 切比雪夫低通滤波器.....	18
2.3 椭圆滤波器.....	21
2.4 三种滤波器的比较.....	21
3. 模拟滤波器到数字滤波器的变换.....	22

3.1 脉冲响应不变法.....	22
3.2 双线性变换法.....	26
4. 直接利用 MATLAB 函数设计 IIR 数字滤波器.....	27
附录 2 FIR 数字滤波器设计方法概述.....	29
1. 线性相位 FIR 数字滤波器.....	29
(1) 线性相位条件: .....	29
(2) 频率响应.....	29
(3) 幅度函数.....	29
(4) 利用 MATLAB 计算频率响应和幅度函数、相位函数.....	30
2. 窗函数法设计 FIR 数字滤波器.....	32
3. 频率取样法设计 FIR 数字滤波器.....	35
4. 利用 MATLAB 函数设计 FIR 数字滤波器.....	38
(1) fir1 函数.....	38
(2) fir2 函数.....	38
参考文献.....	40

## 实验 1 利用 DFT 分析信号频谱

### 一、实验目的

1. 加深对 DFT 原理的理解。
2. 应用 DFT 分析信号的频谱。
3. 深刻理解利用 DFT 分析信号频谱的原理，分析实现过程中出现的现象及解决方法。

### 二、实验设备与环境

计算机、MATLAB 软件环境。

### 三、实验基础理论

#### 1. DFT 与 DTFT 的关系

有限长序列  $x(n)$  ( $0 \leq n \leq N-1$ ) 的离散时间傅里叶变换  $X(e^{j\omega})$  在频率区间 ( $0 \leq \omega \leq 2\pi$ ) 的  $N$  个等间隔分布的点  $k\omega = 2\pi k/N$  ( $0 \leq k \leq N-1$ ) 上的  $N$  个取样值可以由下式表示:

$$X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{k=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = X(k) \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (2-1)$$

由上式可知，序列  $x(n)$  的  $N$  点 DFT  $X(k)$ ，实际上就是  $x(n)$  序列的 DTFT 在  $N$  个等间隔频率点  $k\omega = 2\pi k/N$  ( $0 \leq k \leq N-1$ ) 上样本  $X(k)$ 。

#### 2. 利用 DFT 求 DTFT

**方法 1:** 由  $X(k)$  恢复出  $X(e^{j\omega})$  的方法如图 2.1 所示:

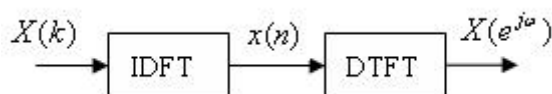


图 2.1 由  $N$  点 DFT 恢复频谱 DTFT 的流程

由图 2.1 所示流程可知:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \right] e^{-j\omega n} \quad (2-2)$$

由式 2-2 可以得到

$$x(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^N X(k) \phi\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (2-3)$$

其中  $\phi(x)$  为内插函数

$$\phi(\omega) = \frac{\sin(N\omega/2)}{N \sin(\omega/2)} \cdot e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \quad (2-4)$$

**方法 2:** 然而在实际 MATLAB 计算中, 上述插值运算不见得是最好的办法。由于 DFT 是 DTFT 的取样值, 其相邻两个频率样本点的间距为  $2\pi/N$ , 所以如果我们增加数据的长度  $N$ , 使得到的 DFT 谱线就更加精细, 其包络就越接近 DTFT 的结果, 这样就可以利用 DFT 来近似计算 DTFT。如果没有更多的数据, 可以通过补零来增加数据长度。

### 3. 利用 DFT 分析连续时间信号的频谱

采用计算机分析连续时间信号的频谱, 第一步就是把连续时间信号离散化, 这里需要进行两个操作: 一是采样, 二是截断。

对于连续时间非周期信号  $x_a(t)$ , 按采样间隔  $T$  进行采样, 截取长度为  $M$ , 那么

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt = T \sum_{n=0}^{M-1} x_a(nT) e^{-j\Omega nT} \quad (2-5)$$

对  $X_a(j\Omega)$  进行  $N$  点频域采样, 得到

$$X_a(j\Omega) \Big|_{\Omega=k \frac{2\pi}{NT}} = T \sum_{n=0}^{M-1} x_a(nT) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = TX_M(k) \quad (2-6)$$

因此, 可以将利用 DFT 分析连续非周期信号频谱的步骤归纳如下:

- (1) 确定时域采样间隔  $T$ , 得到离散序列  $x(n)$ ;
- (2) 确定截取长度  $M$ , 得到  $M$  点离散序列  $x_M(n) = x(n)w(n)$ , 这里  $w(n)$  为窗函数。
- (3) 确定频域采样点数  $N$ , 要求  $N \geq M$ 。
- (4) 利用 FFT 计算离散序列的  $N$  点 DFT, 得到  $X_M(k)$ 。
- (5) 根据式 (2-6) 由  $X_M(k)$  计算  $X_a(j\Omega)$  采样点的近似值。

采用上述方法计算  $x_a(t)$  的频谱, 需要注意如下三个问题:

(1) 频谱混叠。如果不满足采样定理的条件, 频谱会出现混叠误差。对于频谱无限宽的信号, 应考虑覆盖大部分主要频率分量的范围。

(2) 栅栏效应和频谱分辨率。使用 DFT 计算频谱, 得到的结果只是  $N$  个频谱样本值, 样本值之间的频谱是未知的, 像通过一个栅栏观察频谱, 称为“栅栏效应”。频谱分辨率与记录长度成反比, 要提高频谱分辨率, 就要增加记录时间。

(3) 频谱泄露。对信号截断会把窗函数的频谱引入信号频谱, 造成频谱泄露。解决这个问题的主要办法是采用旁瓣小的窗函数, 频谱泄露和窗函数均会引起误差。

因此, 要合理选取采样间隔和截取长度, 必要时还需考虑加适当的窗。

对于连续时间周期信号, 我们在采用计算机进行计算时, 也总是要进行截断, 序列总是有限长的, 仍然可以采用上述方法近似计算。

#### 4. 可能用到的 MATLAB 函数与代码

实验中 DFT 运算可采用 MATLAB 中提供的函数 `fft` 来实现。

DTFT 可以利用 MATLAB 矩阵运算的方法进行计算

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=n_1}^{n_N} x[n]e^{-j\Omega n} = [x[n_1], x[n_2], \dots, x[n_N]] \cdot \begin{bmatrix} e^{-jn_1\Omega} \\ e^{-jn_2\Omega} \\ \vdots \\ e^{-jn_N\Omega} \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

**例 E2-1** 设  $x(n) = (-0.8)^n, 0 \leq n \leq 10$ , 试用 MATLAB 近似计算其频谱, 并绘制其  $[0, 2\pi]$  区间的曲线。

**解:** 我们在  $[0, 2\pi]$  区间上以  $0.01\pi$  进行取样, 计算对应频率上频谱的样本值。

```
%Ex_2_1.m
n=0:10;x=(-0.8).^n;
w=0:0.01*pi:2*pi;
X=x*exp(-j*n'*w);
subplot(211);
plot(w,abs(X));xlabel('\Omega/pi');title('Magnitude');axis tight
subplot(212);
plot(w,angle(X)/pi);xlabel('\Omega/pi');title('Phase');axis tight
```

计算得到的频谱曲线如图 2-1 所示。

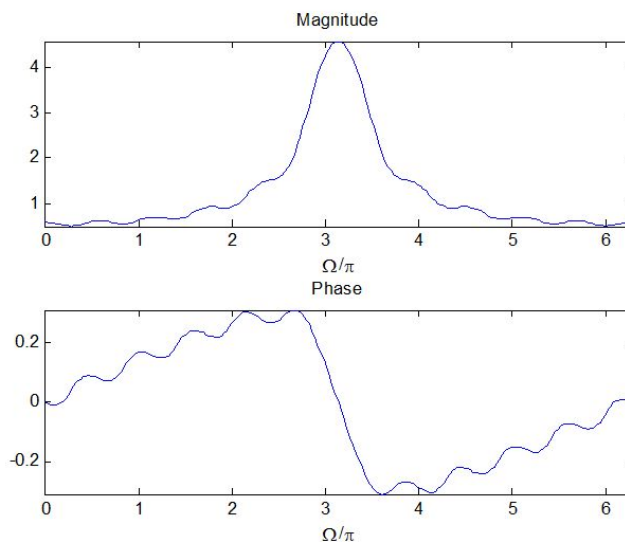


图 2-1 示例信号的频谱

### 四、实验内容

1. 已知  $x(n) = \{2, -1, 1, 1\}$ , 完成如下要求:
  - (1) 计算其 DTFT, 并画出  $[-\pi, \pi]$  区间的波形。
  - (2) 计算 4 点 DFT, 并把结果显示在 (1) 所画的图形中。

- (3) 对  $x(n)$  补零，计算 64 点 DFT，并显示结果。  
 (4) 根据实验结果，分析是否可以由 DFT 计算 DTFT，如果可以，如何实现。

## 2. 考察序列

$$x(n) = \cos(0.48\pi n) + \cos(0.52\pi n)$$

(1)  $0 \leq n \leq 10$  时，用 DFT 估计  $x(n)$  的频谱；将  $x(n)$  补零加长到长度为 100 点序列用 DFT 估计  $x(n)$  的频谱。要求画出相应波形。

(2)  $0 \leq n \leq 100$  时，用 DFT 估计  $x(n)$  的频谱，并画出波形。

(3) 根据实验结果，分析怎样提高频谱分辨率。

3. 已知信号  $x(t) = 0.15 \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) - 0.1 \sin(2\pi f_3 t)$ ，其中  $f_1 = 1\text{Hz}$ ， $f_2 = 2\text{Hz}$ ， $f_3 = 3\text{Hz}$ 。从  $x(t)$  的表达式可以看出，它包含三个频率的正弦波，但是，从其时域波形（图 E2-1）来看，似乎是一个正弦信号，利用 DFT 做频谱分析，确定适合的参数，使得到的频谱的频率分辨率符合需要。

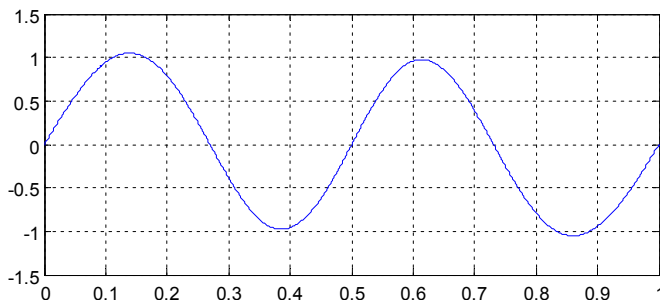


图 E2-1

4. 利用 DFT 近似分析连续时间信号  $x(t) = e^{-0.1t} u(t)$  的频谱（幅度谱）。分析采用不同的采样间隔和截取长度进行计算的结果，并最终确定适合的参数。

## 五、实验报告要求

1. 简述实验目的、实验原理、实验内容和实验过程。
2. 列出完成各项实验内容所编写的程序代码并给出实验结果，程序代码中在必要的地方应加上注释，必要时应对实验结果进行分析。
3. 总结实验中的主要结论、遇到的问题及解决方法，谈谈你的收获和体会。

## 实验 2 利用 FFT 计算线性卷积

### 一、实验目的

1. 掌握利用 FFT 计算线性卷积的原理及具体实现方法。
2. 加深理解重叠相加法和重叠保留法。
3. 考察利用 FFT 计算线性卷积各种方法的适用范围。

### 二、实验设备与环境

计算机、MATLAB 软件环境。

### 三、实验基础理论

#### 1. 线性卷积与圆周卷积

设  $x(n)$  为  $L$  点序列， $h(n)$  为  $M$  点序列， $x(n)$  和  $h(n)$  的线性卷积为

$$y_l(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (3-1)$$

$y_l(n)$  的长度为  $L + M - 1$ 。

$x(n)$  和  $h(n)$  的  $N$  点圆周卷积为

$$y(n) = x(n) \textcircled{N} h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h((n-m))_N R_N(n) \quad (3-2)$$

圆周卷积与线性卷积相等而不产生交叠的必要条件为

$$N \geq L + M - 1 \quad (3-3)$$

**圆周卷积定理：**根据 DFT 的性质， $x(n)$  和  $h(n)$  的  $N$  点圆周卷积的 DFT 等于它们 DFT 的乘积

$$DFT[x(n) \textcircled{N} h(n)] = X(k)H(k) \quad (3-4)$$

#### 2. 快速卷积

快速卷积算法用圆周卷积实现线性卷积，根据圆周卷积定理利用 FFT 算法实现圆周卷积。可以将快速卷积的步骤归纳如下：

(1) 为了使线性卷积可以用圆周卷积来计算，必须选择  $N \geq L + M - 1$ ；同时为了使用基-2FFT 完成卷积运算，要求  $N = 2^v$ 。采用补零的办法使  $x(n)$  和  $h(n)$  的长度均为  $N$ 。

(2) 计算  $x(n)$  和  $h(n)$  的  $N$  点 FFT

$$\begin{aligned} x(n) &\xrightarrow{FFT} X(k) \\ h(n) &\xrightarrow{FFT} H(k) \end{aligned}$$



(3) 组成乘积

$$Y(k) = X(k)H(k)$$

(4) 利用 IFFT 计算  $Y(k)$  的 IDFT, 得到线性卷积  $y(n)$

$$Y(k) \xrightarrow{\text{IFFT}} y(n)$$

### 3. 分段卷积

我们考察单位取样响应为  $h(n)$  的线性系统, 输入为  $x(n)$ , 输出为  $y(n)$ , 则

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

当输入序列  $x(n)$  极长时, 如果要等  $x(n)$  全部集齐时再进行卷积, 会使输出相对输入有较大的延时, 再者如果序列太长, 需要大量的存储单元。为此, 我们把  $x(n)$  分段, 分别求出每段的卷积, 合在一起得到最后总的输出。这种方法称为分段卷积。分段卷积可细分为重叠相加法和重叠保留法。

**重叠保留法:** 设  $x(n)$  的长度为  $N_x$ ,  $h(n)$  的长度为  $M$ 。我们把序列  $x(n)$  分成多段  $N$  点序列  $x_i(n)$ , 每段与前一段重叠  $M-1$  个样本。由于第一段没有前一段保留信号, 为了修正, 我们在第一个输入段前面填充  $M-1$  个零。计算每一段与  $h(n)$  的圆周卷积, 则其每段卷积结果的前  $M-1$  个样本不等于线性卷积值, 不是正确的样本值。所以我们将每段卷积结果的前  $M-1$  个样本舍去, 只保留后面的  $N-M+1$  个正确输出样本, 把这些输出样本合起来, 得到总的输出。

利用 FFT 实现重叠保留法的步骤如下:

(1) 在  $x(n)$  前面填充  $M-1$  个零, 扩大以后的序列为

$$\hat{x}(n) = \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{M-1 \text{ 个}}, x(n)$$

(2) 将  $x(n)$  分为若干  $N$  点子段, 设  $L = N - M + 1$  为每一段的有效数据长度, 则第  $i$  段  $x_i(n)$  ( $0 \leq n \leq N-1$ ) 的数据为

$$x_i(n) = \hat{x}(m) \quad iL \leq m \leq iL + N - 1, \quad i \geq 0, \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

(3) 计算每一段与  $h(n)$  的  $N$  点圆周卷积, 利用 FFT 计算圆周卷积:

$$x_i(n) \xrightarrow{\text{FFT}} X_i(k)$$

$$h(n) \xrightarrow{\text{FFT}} H(k)$$

$$Y_i(k) = X_i(k)H(k)$$

$$Y_i(k) \xrightarrow{\text{IFFT}} y_i(n)$$

(4) 舍去每一段卷积结果的前  $M-1$  个样本, 连接剩下样本, 得到卷积结果  $y(n)$ 。

**重叠相加法:** 设  $h(n)$  长度为  $M$ , 将信号  $x(n)$  分解成长为  $L$  的子段, 建议  $L$  选择与的  $M$

数量级相同。以  $x_i(n)$  表示每段信号，则

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(n)$$

$$x_i(n) = \begin{cases} x(n+iL) & , 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & , \text{其它} \end{cases}$$

$$x(n) * h(n) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(n) * h(n)$$

每一段卷积  $y_i(n)$  的长度为  $L + M - 1$ ，所以在做求和时，相邻两段序列有  $M - 1$  个样本重叠，即前一段的最后  $M - 1$  个样本和下一段的前  $M - 1$  个序列重叠，这个重叠部分相加，再与不重叠部分共同组成输出  $y(n)$ 。

利用 FFT 实现重叠保留法的步骤如下：

- (1) 将  $x(n)$  分为若干  $L$  点子段  $x_i(n)$ 。
- (2) 计算每一段与  $h(n)$  的卷积  $y_i(n)$ ，根据快速卷积算法利用 FFT 计算卷积。
- (3) 将各段  $y_i(n)$ （包括重叠部分）相加，得到输出  $y(n)$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(n - iL)$$

#### 4. 可能用到的 MATLAB 函数

实验中 FFT 运算可采用 MATLAB 中提供的函数 `fft` 来实现。

MATLAB 提供了函数 `conv` 用来计算线性卷积，实验中可以将编程计算的结果和 `conv` 函数的计算结果相比较，以验证结果的正确性，`conv` 函数用法如下

$y = \text{conv}(x,h)$      $x$  和  $h$  为要进行卷积运算的两个序列， $y$  为卷积结果。

统计程序运行时间可以利用 MATLAB 提供的 `tic` 和 `toc` 两个命令，具体用法如下：

```
tic
.....需要运行的程序代码
```

```
toc
```

即，在需要统计运行时间的程序代码之前加上 `tic` 命令，之后加上 `toc` 命令，此时会在命令窗口中显示该程序的运行时间，例如将下列代码写入一个 `m` 文件并执行

```
tic
A=[1,2;3,4];B=[5,6;7,8];
x=A/B;
toc
命令窗口中显示
Elapsed time is 0.000058 seconds.
```

即执行上述代码耗费时间 0.000058 秒。

#### 四、实验内容

假设要计算序列  $x(n) = u(n) - u(n - L)$ ,  $0 \leq n \leq L$  和  $h(n) = \cos(0.2\pi n)$ ,  $0 \leq n \leq M$  的线性卷积, 完成以下实验内容

1. 设  $L = M$ , 根据线性卷积的表达式和快速卷积的原理, 分别编程实现计算两个序列线性卷积的方法, 比较当序列长度分别为 8, 16, 32, 64, 256, 512, 1024 时, 两种方法计算线性卷积所需时间。

2. 当  $L = 2048$  且  $M = 256$  时, 比较直接计算线性卷积和快速卷积所需的时间, 进一步考察当  $L = 4096$  且  $M = 256$  时两种算法所需的时间。

3. 编程实现利用重叠相加法计算两个序列的线性卷积, 考察  $L = 2048$  且  $M = 256$  时计算线性卷积的时间, 与第 2 题的结果进行比较。

4. 编程实现利用重叠保留法计算两个序列的线性卷积, 考察  $L = 2048$  且  $M = 256$  时计算线性卷积的时间, 与第 2 题的结果进行比较。

#### 五、实验报告要求

1. 简述实验目的、实验原理、实验内容和实验过程。
2. 列出完成各项实验内容所编写的程序代码并给出实验结果, 程序代码中在必要的地方应加上注释, 必要时应对实验结果进行分析。
3. 总结实验中的主要结论、遇到的问题及解决方法, 谈谈你的收获和体会。

## 实验 3 IIR 数字滤波器设计

### 一、实验目的

1. 掌握利用脉冲响应不变法和双线性变换法设计 IIR 数字滤波器的原理及具体方法。
2. 加深理解数字滤波器和模拟滤波器之间的技术指标转化。
3. 掌握脉冲响应不变法和双线性变换法设计 IIR 数字滤波器的优缺点及适用范围。

### 二、实验设备与环境

计算机、MATLAB 软件环境。

### 三、实验基础理论

详见附录 1。

### 四、实验内容

设采样频率为  $f_s = 10\text{kHz}$ ，设计数字低通滤波器，满足如下指标

通带截止频率：  $f_p = 1\text{kHz}$ ， 通带波动：  $R_p = 1\text{dB}$

阻带截止频率：  $f_{st} = 1.5\text{kHz}$ ， 阻带衰减：  $A_s = 15\text{dB}$

要求分别设计巴特沃斯、切比雪夫 I 型、切比雪夫 II 型和椭圆模拟原型滤波器，并分别结合脉冲响应不变法和双线性变换法进行设计。结合实验结果，分别讨论采用上述方法设计的数字滤波器是否都能满足给定指标要求，分析脉冲响应不变法和双线性变换法设计 IIR 数字滤波器的优缺点及适用范围。

### 五、实验报告要求

1. 简述实验目的、实验原理、实验内容和实验过程。
2. 列出完成各项实验内容所编写的程序代码并给出实验结果，程序代码中在必要的地方应加上注释，必要时应对实验结果进行分析。
3. 总结实验中的主要结论、遇到的问题及解决方法，谈谈你的收获和体会。

## 实验 4 FIR 数字滤波器设计

### 一、实验目的

掌握窗函数法和频率取样法设计 FIR 数字滤波器的原理及具体方法。

### 二、实验设备与环境

计算机、MATLAB 软件环境。

### 三、实验基础理论

详见附录 2。

### 四、实验内容

1. 设计一个数字低通 FIR 滤波器，其技术指标如下

$$\omega_p = 0.2\pi, R_p = 0.25dB$$

$$\omega_{st} = 0.3\pi, A_s = 50dB$$

分别采用矩形窗、汉宁窗、海明窗、布莱克曼窗、凯瑟窗设计该滤波器。结合实验结果，分别讨论采用上述方法设计的数字滤波器是否都能满足给定指标要求。

2. 设计一个数字带通 FIR 滤波器，其技术指标如下

$$\text{下阻带边缘: } \omega_{st1} = 0.2\pi, A_s = 60dB$$

$$\text{下通带边缘: } \omega_{p1} = 0.35\pi, R_p = 1dB$$

$$\text{上通带边缘: } \omega_{p2} = 0.65\pi, R_p = 1dB$$

$$\text{上阻带边缘: } \omega_{st2} = 0.8\pi, A_s = 60dB$$

3. 采用频率取样设计法设计 FIR 数字低通滤波器，满足以下指标

$$\omega_p = 0.2\pi, R_p = 0.25dB$$

$$\omega_{st} = 0.3\pi, A_s = 50dB$$

(1) 取  $N = 20$ ，过渡带没有样本。

(2) 取  $N = 40$ ，过渡带有一个样本， $T = 0.39$ 。

(3) 取  $N = 60$ ，过渡带有两个样本， $T1 = 0.5925$ ， $T2 = 0.1099$ 。

(4) 分别讨论采用上述方法设计的数字滤波器是否都能满足给定指标要求。

4. 采用频率取样技术设计下面的高通滤波器

$$\omega_{st} = 0.6\pi, A_s = 50dB$$

$$\omega_p = 0.8\pi, R_p = 1dB$$

对于高通滤波器， $N$  必须为奇数（或 1 型滤波器）。选择  $N = 33$ ，过渡带有两个样本，过渡带样本最优值为  $T1 = 0.1095$ ， $T2 = 0.598$ 。

## 五、实验报告要求

1. 简述实验目的、实验原理、实验内容和实验过程。
2. 列出完成各项实验内容所编写的程序代码并给出实验结果，程序代码中在必要的地方应加上注释，必要时应对实验结果进行分析。
3. 总结实验中的主要结论、遇到的问题及解决方法，谈谈你的收获和体会。

## 附录 1 IIR 数字滤波器设计方法概述

IIR 滤波器具有无限长持续时间脉冲响应,而模拟滤波器一般都具有无限长的脉冲响应,因此它与模拟滤波器相匹配。IIR 滤波器设计的基本方法就是先设计一个合适的模拟滤波器,然后利用复值映射把模拟滤波器变换成数字滤波器。

### 1. 数字滤波器和模拟滤波器的一些指标

图 A1-1 中画出了数字滤波器的幅频特性和指标。其中  $[0, \omega_p]$  称为通带,  $[\omega_{st}, \pi]$  称为阻带,  $[\omega_p, \omega_{st}]$  为过渡带,  $\delta_1$  为通带响应中的容限,  $\delta_2$  为阻带的容限,  $R_p$  为通带波动,  $A_s$  为阻带衰减, 且

$$R_p = -20 \log_{10} \frac{1 - \delta_1}{1 + \delta_1} \quad (A1-1)$$

$$A_s = -20 \log_{10} \frac{\delta_2}{1 + \delta_1}$$

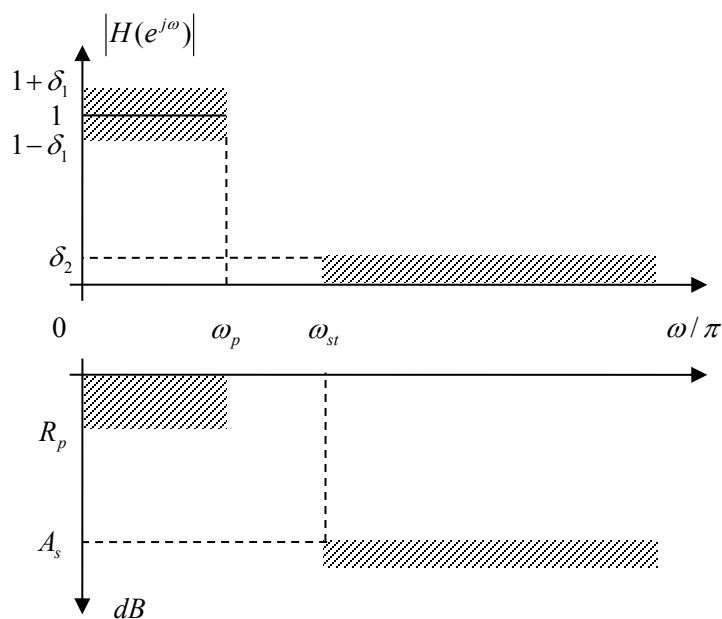


图 A1-1 数字滤波器的幅频特性和技术指标

图 A1-2 中画出了模拟滤波器的技术指标。其中  $\varepsilon$  为通带波动系数,  $\Omega_p$  是单位为弧度/秒的通带截止频率,  $A$  为以 dB 为单位的阻带衰减参数,  $\Omega_{st}$  是单位为弧度/秒的阻带截止频率。参数  $\varepsilon$  和  $A$  与滤波器的通带波动  $R_p$  及阻带衰减  $A_s$  之间有如下关系

$$R_p = -10 \log_{10} \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad \varepsilon = \sqrt{10^{R_p/10} - 1} \quad (A1-2)$$

$$A_s = -10 \log_{10} \frac{1}{A^2} \quad A = 10^{A_s/20}$$

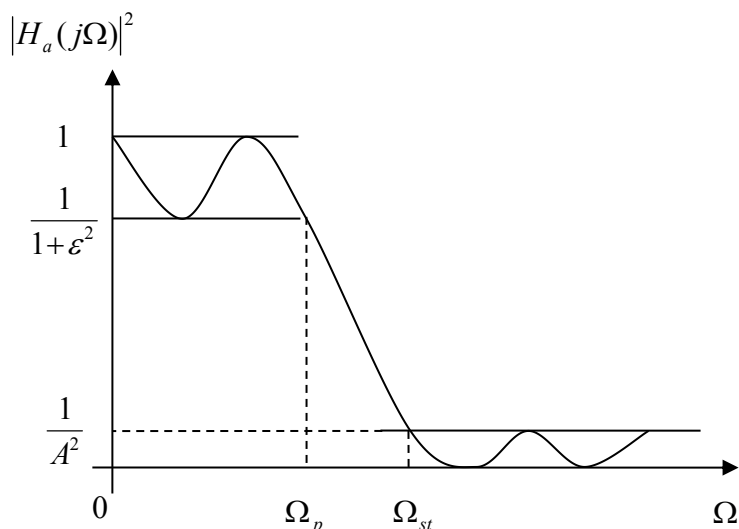


图 A1-2 模拟滤波器的技术指标

## 2. 模拟原型滤波器

IIR 滤波器设计方法由已有的模拟滤波器得到数字滤波器，我们将这些模拟滤波器称为原型滤波器。常用的模拟原型滤波器有巴特沃斯 (Butterworth) 滤波器、切比雪夫 (Chebyshev, I 型和 II 型) 滤波器和椭圆 (Ellipse) 滤波器等。

### 2.1 巴特沃斯滤波器

$N$  阶巴特沃斯低通滤波器的幅度平方响应为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} \quad (\text{A1-3})$$

其中， $N$  为滤波器阶数， $\Omega_c$  是截止频率 (单位:  $rad/s$ )。对于式 A1-3 有几点需要说明:

(1) 对于所有的  $N$ ，当  $\Omega = 0$  时， $|H_a(j0)|^2 = 1$ 。  
 (2) 对于所有的  $N$ ，当  $\Omega = \Omega_c$  时， $|H_a(j\Omega_c)|^2 = 1/2$ ，这说明在  $\Omega_c$  处有 3dB 的衰减。

- (3)  $|H_a(j\Omega)|^2$  是  $\Omega$  的单调递减函数。  
 (4)  $N \rightarrow \infty$  时， $|H_a(j\Omega)|^2$  为趋于理想的低通滤波器。  
 (5)  $|H_a(j\Omega)|^2$  在  $\Omega = 0$  处取得最大值，因为在这里各阶导数存在且为 0。

我们由式 A1-4 来确定系统函数  $H_a(s)$

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=s/j} \quad (\text{A1-4})$$

由式 A1-4 可以得到，分母多项式的极点为



$$p_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)}, k = 0, 1, 2, \dots, 2N-1 \quad (\text{A1-5})$$

由式 A1-5 可知  $H_a(s)H_a(-s)$  有  $2N$  个极点，等间隔分布在半径为  $\Omega_c$  的圆上，其角度间隔为  $\pi/N$ ，且极点不会落在虚轴上。我们选择左半平面的极点，得到一个稳定、因果的滤波器的  $H_a(s)$

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \quad (\text{A1-6})$$

在 MATLAB 中，设计阶数为  $N$ ，截止频率为  $\Omega_c$  的巴特沃斯模拟原型滤波器可以通过两种方法实现：

**方法 1:** 在一般设计中，先把  $\Omega_c$  选择为  $1 \text{ rad/s}$ ，使频率得到归一化，归一化后的巴特沃斯滤波器系统函数的极点分布及分母多项式系数等都有现成的表格可查。然后将归一化巴特沃斯滤波器系统函数中的变量  $s$  用  $s/\Omega_c$  替换以后，即可得到任意  $\Omega_c$  的非归一化的巴特沃斯滤波器。由于巴特沃斯滤波器系统函数不存在零点，则将归一化巴特沃斯滤波器系统函数的极点倍乘以  $\Omega_c$ ，增益倍乘以  $\Omega_c^N$  即可实现上述由归一化巴特沃斯滤波器到非归一化巴特沃斯滤波器的变换。

MATLAB 提供了函数 `[z,p,k] = buttap(N)` 来设计  $N$  阶归一化巴特沃斯模拟原型滤波器，它返回数组  $z$  和  $p$ （零点和极点）以及增益  $k$ 。

**例 EA1-1** 试用 MATLAB 设计一个  $N = 3$ ， $\Omega_c = 0.5$  的巴特沃斯模拟滤波器。

**解:** 首先采用 `buttap` 函数设计  $N$  阶归一化巴特沃斯滤波器

```
>> N = 3;
```

```
>> [z,p,k] = buttap(N);
```

然后将归一化巴特沃斯滤波器系统函数的极点倍乘以  $\Omega_c$ ，增益倍乘以  $\Omega_c^N$  得到非归一化的巴特沃斯滤波器

```
>> OmegaC = 0.5;
```

```
>> b = k*OmegaC^N
```

```
b =
```

```
0.1250
```

```
>> a = poly(p*OmegaC)
```

```
a =
```

```
1.0000    1.0000    0.5000    0.1250
```

所以，设计得到的巴特沃斯模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{0.125}{s^3 + s^2 + 0.5s + 0.125}$$

**方法 2:** 在 MATLAB 中还可以直接利用 butter 函数设计巴特沃斯模拟原型滤波器。butter 函数既可用于设计模拟巴特沃斯滤波器也可用于设计数字巴特沃斯滤波器, 用于设计模拟巴特沃斯滤波器时, 其调用格式为

$[b,a] = \text{butter}(N,Wn,'s')$   $N$  表示滤波器的阶数,  $Wn$  表示截止频率, 's'表示设计模拟滤波器。

**例 EA1-2** 试用 MATLAB 的 butter 函数重新设计例 EA1-1 的巴特沃斯模拟滤波器。

**解:** 直接利用 butter 函数设计巴特沃斯滤波器代码如下

```
>> N = 3;
>> OmegaC = 0.5;
>> [b,a] = butter(N,OmegaC,'s')
```

运行结果为

```
b =
      0      0      0    0.1250
a =
  1.0000  1.0000  0.5000  0.1250
```

所以

$$H_a(s) = \frac{0.125}{s^3 + s^2 + 0.5s + 0.125}$$

设计结果与例 EA1-1 相同。

### 巴特沃斯模拟原型滤波器设计方程:

模拟低通滤波器是由参数  $\Omega_p$ ,  $R_p$ ,  $\Omega_{st}$  和  $A_s$  描述的, 设计巴特沃斯滤波器其实就是根据这些参数求得滤波器阶数  $N$  和截止频率  $\Omega_c$ 。

为了满足设计要求, 我们希望

$\Omega = \Omega_p$  时,  $-10 \log_{10} |H_a(j\Omega)|^2 = R_p$ , 即

$$-10 \log_{10} \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2N}} \right) = R_p \quad (\text{A1-7})$$

并且  $\Omega = \Omega_{st}$  时,  $-10 \log_{10} |H_a(j\Omega)|^2 = A_s$ , 即

$$-10 \log_{10} \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{\Omega_{st}}{\Omega_c} \right)^{2N}} \right) = A_s \quad (\text{A1-8})$$

求解上述两个方程，得到

$$N = \frac{\log_{10} \left[ \left( 10^{R_p/10} - 1 \right) / \left( 10^{A_s/10} - 1 \right) \right]}{2 \log_{10} \left( \frac{\Omega_p}{\Omega_{st}} \right)} \quad (\text{A1-9})$$

一般情况下，上式中的  $N$  不为整数，但  $N$  应该为整数，所以我们取  $N$  为比实际值大的最接近实际值的整数，例如  $N=4.5$ ，则取  $N=5$ ，我们用  $\lceil x \rceil$  表示选取比  $x$  大的最小整数，则

$$N = \left\lceil \frac{\log_{10} \left[ \left( 10^{R_p/10} - 1 \right) / \left( 10^{A_s/10} - 1 \right) \right]}{2 \log_{10} \left( \frac{\Omega_p}{\Omega_{st}} \right)} \right\rceil \quad (\text{A1-10})$$

由于  $N$  比实际需要的要大，所以在  $\Omega_p$  或  $\Omega_{st}$  处将满足或超过指标，为了在  $\Omega_p$  处满足指标，则

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{R_p/10} - 1}} \quad (\text{A1-11})$$

为了在  $\Omega_{st}$  处满足指标

$$\Omega_c = \frac{\Omega_{st}}{\sqrt[2N]{10^{A_s/10} - 1}} \quad (\text{A1-12})$$

实际设计中，我们可以直接选择式 A1-11 的结果作为  $\Omega_c$  的值，也可以在介于式 A1-11 和式 A1-12 的范围内选择  $\Omega_c$ 。

**例 EA1-3** 设计一个满足下面要求的低通巴特沃斯低通滤波器

通带截止频率： $\Omega_p = 0.2\pi$ ，通带波动： $R_p = 7dB$

阻带截止频率： $\Omega_{st} = 0.3\pi$ ，阻带衰减： $A_s = 16dB$

**解：**首先由式 A1-10 求得滤波器的阶数

```
>> Wp = 0.2*pi; Ws = 0.3*pi;
```

```
>> Rp = 7; As = 16;
```

```
>> N = ceil((log10((10^(Rp/10)-1)/(10^(As/10)-1)))/(2*log10(Wp/Ws)))
```

计算结果为

N =

3

然后分别计算式 A1-11 和式 A1-12

```
>> OmegaC1 = Wp/((10^(Rp/10)-1)^(1/(2*N)))
```

OmegaC1 =

0.4985

```
>> OmegaC2 = Ws/((10^(As/10)-1)^(1/(2*N)))
```

```
OmegaC2 =
```

0.5122

我们取  $N=3$ ，并直接选择  $\Omega_c = \text{OmegaC1}$ 。

因此我们要设计  $N=3$  和  $\Omega_c=0.4985$  的低通巴特沃斯滤波器

```
>> [b,a] = butter(N,OmegaC1,'s')
```

```
b =
```

0 0 0 0.1238

```
a =
```

1.0000 0.9969 0.4969 0.1238

因此

$$H_a(s) = \frac{0.1238}{s^3 + 0.9969s^2 + 0.4969s + 0.1238}$$

这里我们可以利用 `freqs` 函数来计算模拟滤波器的频率响应，并绘制  $0 \sim 0.5\pi$  之间的频率响应曲线，同时利用 `impulse` 函数计算模拟滤波器的单位冲激响应

```
>> [H,w] = freqs(b,a);
```

```
>> subplot(221);
```

```
>> plot(w/pi,abs(H));
```

```
>> grid on;xlabel('\Omega(\pi)');ylabel('|H(j\Omega)|');axis([0,0.5,0,1]);
```

```
>> subplot(222);
```

```
>> plot(w/pi,20*log10((abs(H))/max(abs(H))));
```

```
>> grid on;xlabel('\Omega(\pi)');ylabel('|H(j\Omega)|,dB');axis([0,0.5,-30,0]);
```

```
>> subplot(223);
```

```
>> plot(w/pi,angle(H)/pi);
```

```
>> grid on;xlabel('\Omega(\pi)');ylabel('Phase of H(j\Omega)(\pi)');axis([0,0.5,-1,1]);
```

```
>> t=0:0.01:30;
```

```
>> h = impulse(b,a,t);
```

```
>> subplot(224);
```

```
>> plot(t,h);
```

```
>> grid on;xlabel('t(s)');ylabel('Impulse Response');
```

结果如图 A1-3 所示。

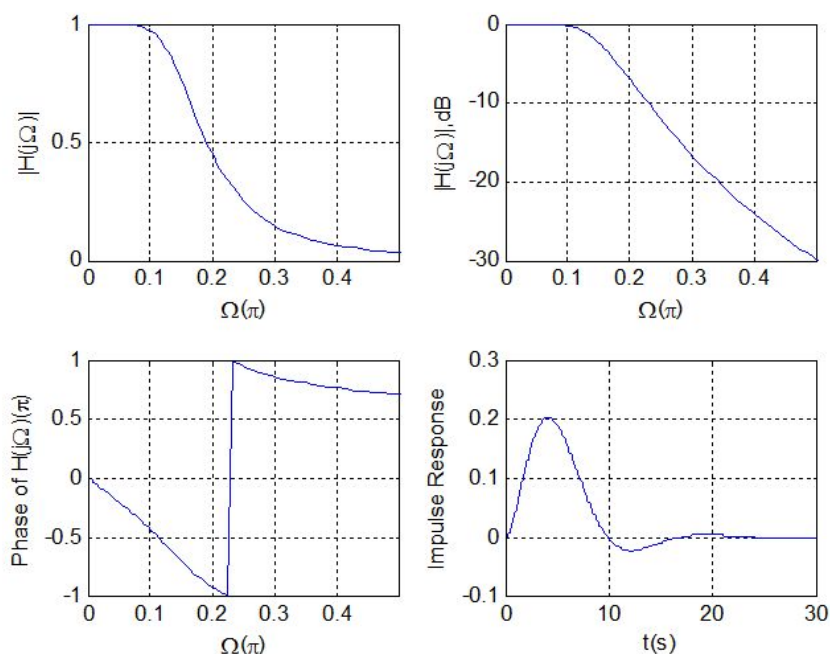


图 A1-3 例 EA1-3 低通巴特沃斯滤波器的频率响应和单位冲激响应

## 2.2 切比雪夫低通滤波器

切比雪夫滤波器有两种，切比雪夫 I 型滤波器在通带中具有等波动响应，而切比雪夫 II 型滤波器在阻带中具有等波动响应。相比于单调特性的滤波器，选择等波动特性的滤波器，可以得到较低阶数的滤波器，例如巴特沃斯滤波器在通带和阻带上的响应均是单调的，因此对于相同的指标，切比雪夫滤波器的阶数比巴特沃斯滤波器的阶数低。

**切比雪夫 I 型滤波器**的幅度平方响应为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 c_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)} \quad (\text{A1-13})$$

其中  $N$  为滤波器阶数， $\Omega_c$  为截止频率， $\varepsilon$  为通带波动系数，它与  $R_p$  的关系如式 A1-2 所示， $c_N(x)$  是  $N$  阶切比雪夫多项式

$$c_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x) & 0 < x \leq 1 \\ ch(Nch^{-1}x) & x > 1 \end{cases} \quad (\text{A1-14})$$

确定系统函数  $H_a(s)$  的过程与前面巴特沃斯滤波器里介绍的方法类似，先求出  $H_a(s)H_a(-s)$  的极点，然后把左半平面的极点分配给  $H_a(s)$ 。通过求下式的根得到  $H_a(s)H_a(-s)$  的极点

$$1 + \varepsilon^2 c_N^2 \left( \frac{s}{j\Omega_c} \right) \quad (\text{A1-15})$$

如果  $p_k = \sigma_k + j\Omega_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  是上式的根 (左半平面), 则

$$\begin{aligned} \sigma_k &= (a\Omega_c) \cos \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N} \right] \\ \Omega_k &= (b\Omega_c) \sin \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N} \right] \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{A1-16})$$

其中

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left( \sqrt[N]{\alpha} - \sqrt[N]{1/\alpha} \right) \\ b &= \frac{1}{2} \left( \sqrt[N]{\alpha} + \sqrt[N]{1/\alpha} \right) \end{aligned} \quad \text{其中 } \alpha = \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} \quad (\text{A1-17})$$

这些根落在长轴为  $b\Omega_c$  短轴为  $a\Omega_c$  的椭圆上, 最后可以得到系统函数为

$$H_a(s) = \frac{K}{\prod_k (s - p_k)} \quad (\text{A1-18})$$

其中  $K$  是归一化因子, 可以由下式决定

$$H_a(j0) = \begin{cases} 1 & N \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} & N \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (\text{A1-19})$$

在 MATLAB 中, 设计阶数为  $N$ , 截止频率为  $\Omega_c$ , 通带波动为  $R_p$  的切比雪夫 I 型模拟原型滤波器可以通过两种方法实现:

**方法 1:** MATLAB 提供了函数  $[z,p,k] = \text{cheblap}(N,Rp)$  来设计一个阶数为  $N$ , 通带波动为  $R_p$  的归一化 (截止频率为 1) 切比雪夫 I 型模拟原型滤波器, 它返回数阻  $z$  和  $p$  (零点和极点) 以及增益  $k$ 。切比雪夫 I 型滤波器系统函数不存在零点, **将归一化切比雪夫 I 型滤波器系统函数的极点倍乘以  $\Omega_c$ , 增益倍乘以  $s = 0$  时非归一化滤波器系统函数分母多项式和归一化滤波器系统函数多项式的比值**, 即可实现由归一化切比雪夫 I 型滤波器到非归一化切比雪夫 I 型滤波器的变换。

**方法 2:** 在 MATLAB 中还可以直接利用 `cheby1` 函数设计切比雪夫 I 型模拟原型滤波器。`cheby1` 函数既可用于设计模拟切比雪夫 I 型滤波器也可用于设计数字切比雪夫 I 型滤波器, 用于设计模拟切比雪夫 I 型滤波器时, 其调用格式为

$[b,a] = \text{cheby1}(N,Rp,Wn,'s')$   $N$  表示滤波器的阶数,  $Rp$  表示通带波动,  $Wn$  表示截止频率, 's' 表示设计模拟滤波器。

#### 切比雪夫 I 型模拟原型滤波器设计方程:

给定参数  $\Omega_p$ ,  $R_p$ ,  $\Omega_{st}$  和  $A_s$ , 设计切比雪夫 I 型滤波器。

首先根据式 A1-2 可以得到

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \sqrt{10^{R_p/10} - 1} \\ A &= 10^{A_s/20}\end{aligned}\quad (\text{A1-20})$$

对于切比雪夫 I 型滤波器有

$$\Omega_c = \Omega_p \quad (\text{A1-21})$$

根据式 A1-13, 由阻带起点  $\Omega_{st}$  处幅度平方函数的关系可以求得  $N$ 。

$$N = \left\lceil \frac{\operatorname{arccos} h\left(\sqrt{A^2 - 1}/\varepsilon\right)}{\operatorname{arccos} h\left(\Omega_{st}/\Omega_p\right)} \right\rceil \quad (\text{A1-22})$$

**切比雪夫 II 型滤波器**有一个单调的通带和等波动的阻带, 这就意味着这种滤波器在  $s$  平面上既有零点又有极点, 因此通带中的群延迟特性比切比雪夫 I 型滤波器要好。切比雪夫 II 型滤波器的幅度平方响应为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left[ \varepsilon^2 c_N^2 \left( \frac{\Omega_c}{\Omega} \right) \right]^{-1}} \quad (\text{A1-23})$$

在 MATLAB 中, 设计阶数为  $N$ , 截止频率为  $\Omega_c$ , 阻带衰减为  $A_s$  的切比雪夫 II 型模拟原型滤波器可以通过两种方法实现:

**方法 1:** MATLAB 提供了函数  $[z,p,k] = \text{cheb2ap}(N,A_s)$  来设计一个阶数为  $N$ , 阻带衰减为  $A_s$  的归一化 (截止频率为 1) 切比雪夫 II 型模拟原型滤波器, 它返回数组  $z$  和  $p$  (零点和极点) 以及增益  $k$ 。切比雪夫 II 型滤波器系统函数存在零点, 可以将**归一化切比雪夫 II 型滤波器系统函数的极点和零点倍乘以  $\Omega_c$ , 增益倍乘以  $s=0$  时非归一化的有理函数和归一化的有理函数的比值**, 即可实现由归一化切比雪夫 II 型滤波器到非归一化切比雪夫 II 型滤波器的变换。

**方法 2:** 在 MATLAB 中还可以直接利用 `cheby2` 函数设计切比雪夫 II 型模拟原型滤波器。`Cheby2` 函数既可用于设计模拟切比雪夫 II 型滤波器也可用于设计数字切比雪夫 II 型滤波器, 用于设计模拟切比雪夫 II 型滤波器时, 其调用格式为

$[b,a] = \text{cheby2}(N,A_s,W_n,'s')$   $N$  表示滤波器的阶数,  $A_s$  表示阻带衰减,  $W_n$  表示截止频率, 's' 表示设计模拟滤波器。

**切比雪夫 II 型模拟原型滤波器设计方程**除了  $\Omega_c = \Omega_{st}$  之外, 与切比雪夫 I 型类似, 这是因为波动在阻带中。

### 2.3 椭圆滤波器

椭圆滤波器的通带和阻带均具有等波动响应,因此相对于巴特沃斯滤波器和切比雪夫滤波器,对于给定相同的指标,它可使阶数最小,换言之对于给定的阶数  $N$ ,它能使过渡带最陡。

椭圆滤波器的幅度平方响应为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)} \quad (\text{A1-24})$$

其中  $N$  为滤波器阶数,  $\Omega_c$  为截止频率,  $\varepsilon$  为通带波动系数,它与  $R_p$  的关系如式 A1-2 所示,  $U_N(x)$  是  $N$  阶雅可比 (Jacobian) 椭圆函数。

在 MATLAB 中,设计阶数为  $N$ ,截止频率为  $\Omega_c$ ,通带波动为  $R_p$ ,阻带衰减为  $A_s$  的椭圆模拟原型滤波器可以通过两种方法实现:

**方法 1:** MATLAB 提供了函数  $[z,p,k] = \text{ellipap}(N,R_p,A_s)$  来设计一个阶数为  $N$ ,通带波动为  $R_p$ ,阻带衰减为  $A_s$  的归一化 (截止频率为 1) 椭圆模拟原型滤波器,它返回数阻  $z$  和  $p$  (零点和极点) 以及增益  $k$ 。将归一化椭圆滤波器系统函数的极点和零点倍乘以  $\Omega_c$ ,增益倍乘以  $s=0$  时非归一化的有理函数和归一化的有理函数的比值,即可实现由归一化椭圆滤波器到非归一化椭圆滤波器的变换。

**方法 2:** 在 MATLAB 中还可以直接利用 `ellip` 函数设计椭圆模拟原型滤波器。`ellip` 函数既可用于设计模拟椭圆滤波器也可用于设计数字椭圆滤波器,用于设计模拟椭圆滤波器时,其调用格式为

$[b,a] = \text{ellip}(N,R_p,A_s,W_n,'s')$   $N$  表示滤波器的阶数,  $R_p$  表示通带波动,  $A_s$  表示阻带衰减,  $W_n$  表示截止频率, 's' 表示设计模拟滤波器。

对于椭圆滤波器的分析较困难,在这里我们不作具体分析,但是椭圆模拟原型滤波器设计方程在很多文献上都已经给出了

$$\Omega_c = \Omega_p \quad (\text{A1-25})$$

$$N = \left\lceil \frac{K(k)K(\sqrt{1-k_1^2})}{K(k_1)K(\sqrt{1-k^2})} \right\rceil \quad (\text{A1-26})$$

其中

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_{st}}, \quad k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}}, \quad K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}} \quad (\text{A1-27})$$

$K(x)$  为完全 I 型椭圆积分, MATLAB 提供了函数 `ellipke` 用于计算该积分。

### 2.4 三种滤波器的比较

如果给定相同的设计指标,选用椭圆滤波器所要求的阶数  $N$  最低,切比雪夫滤波器次



之，巴特沃斯滤波器最高；如果要求的阶数相同，切比雪夫滤波器的过渡带比巴特沃斯滤波器陡，椭圆滤波器的过渡带又比切比雪夫滤波器陡。

然而，从通带的相位响应来看，椭圆滤波器虽然提供了最优的幅度平方响应，但通带上的相位响应非线性较大，而巴特沃斯滤波器在通带上具有相当的线性相位，切比雪夫滤波器的相位特征介于两者之间。所以在实际设计中，选用何种滤波器应视实际用途和指标要求而定。

### 3. 模拟滤波器到数字滤波器的变换

从模拟滤波器到数字滤波器的变换就是要由  $H_a(s)$  进一步求得  $H(z)$ ，也就是由  $s$  平面到  $z$  平面的变换，这种变换要求数字滤波器能模仿模拟滤波器的特性。我们最常用的从模拟滤波器到数字滤波器的变换方法有两种：脉冲响应不变法和双线性变换法。

#### 3.1 脉冲响应不变法

**基本原理：**

从时域响应出发，使数字滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$  模仿模拟滤波器的单位冲激响应  $h_a(t)$ ， $h(n)$  等于  $h_a(t)$  的取样值。

**变换方法：**

**思路：**  $H_a(s) \xrightarrow{\text{拉氏反变换}} h_a(t) \xrightarrow{\text{时域采样}} h_a(nT) = h(n) \xrightarrow{z\text{变换}} H(z)$

(1) 将  $H_a(s)$  进行部分分式展开

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - p_k} \quad (\text{A1-28})$$

(2) 对  $H_a(s)$  进行拉氏反变换

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k t} u(t) \quad (\text{A1-29})$$

(3) 对  $h_a(t)$  时域采样得到  $h(n)$

$$h(n) = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k nT} u(nT) = \sum_{k=1}^N A_k (e^{p_k T})^n u(n) \quad (\text{A1-30})$$

(4) 对  $h(n)$  进行  $z$  变换

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}} \quad (\text{A1-31})$$

**设计步骤:**

- (1) 确定数字滤波器性能指标  $\omega_p$ ,  $\omega_{st}$ ,  $R_p$  和  $A_s$ 。
- (2) 将数字滤波器频率指标转换成相应的模拟滤波器频率指标

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{T} \quad \Omega_{st} = \frac{\omega_{st}}{T} \quad (\text{A1-32})$$

(3) 根据指标  $\Omega_p$ ,  $\Omega_{st}$ ,  $R_p$  和  $A_s$  设计模拟滤波器  $H_a(s)$  (模拟原型滤波器的设计方法请参考附录 2)。

- (4) 将  $H_a(s)$  展成部分分式形式

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - p_k}$$

- (5) 把模拟极点  $p_k$  转换成数字极点  $e^{p_k T}$ , 得到数字滤波器

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

可见  $H_a(s)$  至  $H(z)$  间的变换关系为

$$\frac{1}{s - s_k} \Leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{s_k T}} \quad (\text{A1-33})$$

在 MATLAB 中有两种方法可以实现上述变换。

**方法 1:** 利用 residue 函数和 residuez 函数实现脉冲响应不变法, 这两个函数的使用方法如下

`[r,p,k] = residue(b,a)`

`[b,a] = residue(r,p,k)`

实现多项式形式

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_0} \quad (\text{A1-34})$$

和部分分式形式

$$H(s) = \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \dots + \frac{r_N}{s - p_N} + k(s) \quad (\text{A1-35})$$

之间的转换。

`[r,p,k] = residuez(b,a)`

`[b,a] = residuez(r,p,k)`

实现多项式形式

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} \quad (\text{A1-36})$$

和部分分式形式

$$H(z) = \frac{r_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{r_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \cdots + \frac{r_N}{1 - p_N z^{-1}} + k_1 + k_2 z^{-1} + \cdots \quad (\text{A1-37})$$

之间的转换。

**例 EA1-4** 利用 MATLAB 采用脉冲响应不变法将

$$H_a(s) = \frac{0.125}{s^3 + s^2 + 0.5s + 0.125}$$

转换成数字滤波器  $H(z)$ ，取  $T=1$ 。

**解：**首先，将  $H_a(s)$  展成部分分式形式

```
>> b = [0.125];
>> a = [1 1 0.5 0.125];
>> [r,p,k] = residue(b,a)
r =
    0.5000
   -0.2500 - 0.1443i
   -0.2500 + 0.1443i
p =
   -0.5000
  -0.2500 + 0.4330i
  -0.2500 - 0.4330i
k =
    []
```

所以部分分式展开结果为

$$H(s) = \frac{0.5}{s + 0.5} + \frac{(-0.25 - 0.1443j)}{s - (-0.25 + 0.433j)} + \frac{(-0.25 + 0.1443j)}{s - (-0.25 - 0.433j)}$$

然后，将模拟极点转换成数字极点

```
>> T = 1;
>> p = exp(p*T);
```

最后，利用函数 `residuez` 求出  $H(z)$

```
>> [b,a] = residuez(r,p,k)
b =
```

```
    0    0.0441    0.0317
```

```
a =
    1.0000   -2.0204    1.4641   -0.3679
```

所以数字滤波器为

$$H(z) = \frac{0.0441z^{-1} + 0.0317z^{-2}}{1 - 2.0204z^{-1} + 1.4641z^{-2} - 0.3679z^{-3}}$$

**方法 2:** MATLAB 提供了 `impinvar` 函数采用脉冲响应不变法实现模拟滤波器到数字滤波器的变换，其使用方法如下

`[bz,az] = impinvar(b,a,fs)` 采用脉冲响应不变法将模拟滤波器系统函数的系数向量 `b` 和 `a` 变换成为数字滤波器系统函数的系数向量 `bz` 和 `az`，`fs` 为采样频率。

`[bz,az] = impinvar(b,a)` 采样频率默认为 1 的情况下，采用脉冲响应不变法将模拟滤波器变换为数字滤波器。

**例 EA1-5** 利用 `impinvar` 函数将例 EA1-4 的模拟滤波器变换为数字滤波器。

**解:** 直接调用 `impinvar` 函数采用脉冲响应不变法将模拟滤波器变换为数字滤波器

```
>> b = [0.125];
>> a = [1 1 0.5 0.125];
>> [bz,az] = impinvar(b,a)
bz =
    0    0.0441    0.0317
az =
    1.0000   -2.0204    1.4641   -0.3679
```

计算结果与例 EA1-4 一致。

这里我们可以利用 `freqz` 函数来计算数字滤波器的频率响应，同时利用 `grpdelay` 函数计算群延时响应

```
>> w = [0:500]*pi/500;    %在 0-pi 之间计算 501 个点
>> [H,w] = freqz(bz,az);    %计算频率响应
>> subplot(221);plot(w/pi,abs(H));
>> grid on;xlabel('\omega(\pi)');ylabel('|H(e^{j\omega})|');
>> subplot(222);plot(w/pi,20*log10((abs(H))/max(abs(H))));
>> grid on;xlabel('\omega(\pi)');ylabel('|H(e^{j\omega})|(dB)');
>> subplot(223);plot(w/pi,angle(H)/pi);
>> grid on;xlabel('\omega(\pi)');ylabel('Phase of H(e^{j\omega})(\pi)');
>> grd = grpdelay(bz,az,w);    %计算群延时响应
>> subplot(224);plot(w/pi,grd);
```

```
>> grid on;xlabel('\omega(\pi)');ylabel('Group delay');
```

结果如图 A1-4 所示。

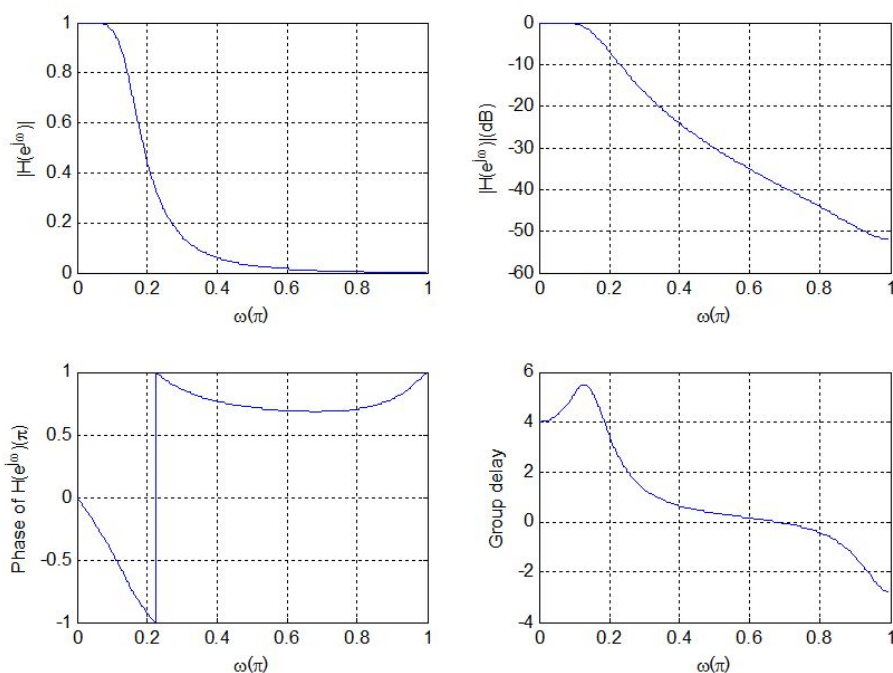


图 A1-4 例 EA1-5 数字滤波器频率响应和群延时

### 3.2 双线性变换法

#### 基本原理:

从频率响应出发, 直接使数字滤波器的频率响应逼近模拟滤波器的频率响应, 进而求得数字滤波器的系统函数  $H(z)$ 。

#### 变换方法:

(1) 通过正切变换  $\Omega = \tan(\Omega_1 T/2)$  将  $s$  平面的整个虚轴  $j\Omega$  压缩到  $s_1$  平面  $j\Omega_1$  轴上的  $-j\pi/T$  到  $j\pi/T$  段上。

(2) 通过  $z = e^{s_1 T}$  变换将  $s_1$  平面映射到  $z$  平面上, 得到  $s$  平面和  $z$  平面的映射关系为

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (\text{A1-38})$$

双线性变换的映射关系如图 A1-5 所示。一般来说为了调节模拟频带与数字频带之间的关系, 可引入常数  $c$ , 使映射关系为

$$s = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (\text{A1-39})$$

设计时可采用使模拟频率特性与数字频率特性在低频处有确切对应关系的常数  $c = \frac{2}{T}$ 。

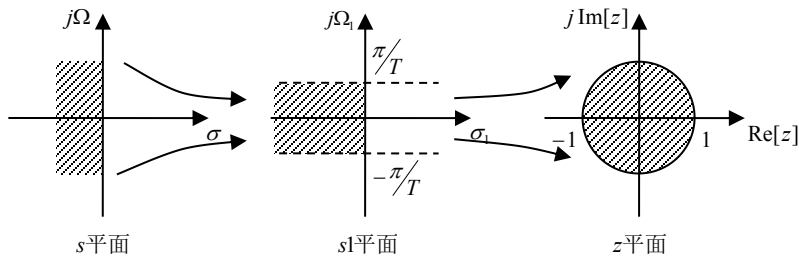


图 A1-5 双线性变换的映射关系

**设计步骤:**

- (1) 确定数字滤波器性能指标  $\omega_p$ ,  $\omega_{st}$ ,  $R_p$  和  $A_s$ 。
- (2) 根据频率的非线性关系, 确定预畸的模拟滤波器频率指标

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) \quad \Omega_{st} = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_{st}}{2}\right) \quad (A1-40)$$

(3) 根据指标  $\Omega_p$ ,  $\Omega_{st}$ ,  $R_p$  和  $A_s$  设计模拟滤波器  $H_a(s)$  (模拟原型滤波器的设计方法请参考附录 2)。

(4) 将双线性变换关系代入, 得到  $H(z)$

$$H(z) = H_a\left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \quad (A1-41)$$

MATLAB 提供了 bilinear 函数采用双线性变换法实现模拟滤波器到数字滤波器的变换, 其使用方法如下

$[bz,az] = \text{bilinear}(b,a,fs)$  采用双线性变换法将模拟滤波器系统函数的系数向量  $b$  和  $a$  变换成为数字滤波器系统函数的系数向量  $bz$  和  $az$ ,  $fs$  为采样频率。

**4. 直接利用 MATLAB 函数设计 IIR 数字滤波器**

前面我们介绍了 butter 函数、cheby1 函数、cheby2 函数、ellip 函数设计模拟滤波器的方法, 这些函数也可直接用于设计 IIR 数字滤波器, 由于双线性变换法的优点, 这些函数都采用双线性变换。这些函数的具体使用方法如下

- $[b,a] = \text{butter}(N,Wn)$  设计低通巴特沃斯数字滤波器
- $[b,a] = \text{cheby1}(N,Rp,Wn)$  设计低通切比雪夫 I 型数字滤波器
- $[b,a] = \text{cheby2}(N,As,Wn,)$  设计低通切比雪夫 II 型数字滤波器
- $[b,a] = \text{ellip}(N,Rp,As,Wn)$  设计低通椭圆数字滤波器

其中,  $N$  表示滤波器的阶数;  $Wn$  表示取值在 0~1 之间的截止频率 (以  $\pi$  为单位), 当  $Wn$  为包含两个元素的向量  $[W1 W2]$  时, 表示设计带通数字滤波器, 通带介于  $W1$  和  $W2$  之间。

`[b,a] = butter(N,Wn,'ftype')` 设计巴特沃斯数字滤波器

`[b,a] = cheby1(N,Rp,Wn,'ftype')` 设计切比雪夫 I 型数字滤波器

`[b,a] = cheby2(N,As,Wn,'ftype')` 设计切比雪夫 II 型数字滤波器

`[b,a] = ellip(N,Rp,As,Wn,'ftype')` 设计椭圆数字滤波器

'ftype'表示数字滤波器的类型，可选选项有'high'、'low'、'stop'，分别表示高通、低通、带阻，设计带阻滤波器时，Wn 为包含两个元素的向量[W1 W2]，阻带介于 W1 和 W2 之间。

上述函数中的参数 N 和 Wn 可以采用函数 `buttord`、函数 `cheb1ord`、函数 `cheb2ord`、函数 `ellipord` 求得，这些函数能在已知设计指标时给出滤波器的阶数 N 和截止频率 Wn。这些函数的具体使用方法如下

`[N,Wn] = buttord(Wp,Wst,Rp,As)` 根据数字滤波器设计指标给出数字巴特沃斯滤波器的阶数 N 和截止频率 Wn

`[N,Wn] = cheb1ord(Wp,Wst,Rp,As)` 根据数字滤波器设计指标给出数字切比雪夫 I 型滤波器的阶数 N 和截止频率 Wn

`[N,Wn] = cheb2ord(Wp,Wst,Rp,As)` 根据数字滤波器设计指标给出数字切比雪夫 II 型滤波器的阶数 N 和截止频率 Wn

`[N,Wn] = ellipord(Wp,Wst,Rp,As)` 根据数字滤波器设计指标给出数字椭圆滤波器的阶数 N 和截止频率 Wn

其中，Wp 和 Wst 分别表示通带和阻带截止频率，Rp 表示通带波动，As 表示阻带衰减。

## 附录 2 FIR 数字滤波器设计方法概述

### 1. 线性相位 FIR 数字滤波器

#### (1) 线性相位条件:

线性相位的 FIR 数字滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$  具有如下特性

$$\begin{aligned} h(n) &= h(N-1-n) && \text{偶对称} \\ h(n) &= -h(N-1-n) && \text{奇对称} \end{aligned} \quad (\text{A2-1})$$

#### (2) 频率响应

FIR 数字滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \quad (\text{A2-2})$$

我们将  $H(e^{j\omega})$  表示为

$$H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} = H(\omega) e^{j\theta(\omega)} \quad (\text{A2-3})$$

其中  $|H(e^{j\omega})|$  是幅度响应,  $H(\omega)$  为幅度函数,  $\theta(\omega)$  为相位函数。幅度函数是一个纯实数, 可为正值和负值。

$h(n)$  偶对称时, 幅度函数和相位函数为

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos \left[ \left( \frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \quad (\text{A2-4})$$

$$\theta(\omega) = - \left( \frac{N-1}{2} \right) \omega \quad (\text{A2-5})$$

$h(n)$  奇对称时, 幅度函数和相位函数为

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \sin \left[ \left( \frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \quad (\text{A2-6})$$

$$\theta(\omega) = - \left( \frac{N-1}{2} \right) \omega + \frac{\pi}{2} \quad (\text{A2-7})$$

#### (3) 幅度函数

$h(n)$  的上述两种情况又可分别分为  $N$  为偶数和奇数两种情况, 所以一共可以分为四种类型的线性相位 FIR 滤波器。



a)  $h(n)$  偶对称,  $N$  为奇数 (1 型)

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos(n\omega) \quad (\text{A2-8})$$

$$a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) \quad (\text{A2-9})$$

$$a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

b)  $h(n)$  偶对称,  $N$  为偶数 (2 型)

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right] \quad (\text{A2-10})$$

$$b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (\text{A2-11})$$

c)  $h(n)$  奇对称,  $N$  为奇数 (3 型)

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} c(n) \sin(n\omega) \quad (\text{A2-12})$$

$$c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \quad (\text{A2-13})$$

d)  $h(n)$  奇对称,  $N$  为偶数 (4 型)

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (\text{A2-14})$$

$$d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (\text{A2-15})$$

#### (4) 利用 MATLAB 计算频率响应和幅度函数、相位函数

MATLAB 提供了函数 `freqz` 用于计算频率响应, 由频率响应可以求得幅度响应和相位响应。对于 FIR 数字滤波器, 其频率响应由式 A2-2 给出, 表达式中不包含分母多项式, 使用函数 `freqz` 计算频率响应时可认为分母多项式为 1, 所以函数调用格式为 `[H,w] = freqz(h,1)`。

函数 `freqz` 无法给出幅度函数和相位函数, 在 MATLAB 中可以通过两种方法计算幅度函数和相位函数。

**方法 1:** 根据  $H(\omega)$  和  $\theta(\omega)$  的表达式, 直接编程实现计算幅度函数和相位函数的过程。

**1 型和 2 型线性相位 FIR 滤波器的幅度函数和相位函数**, 由式 A2-4 和式 A2-5 计算, 计算方法如下

```

N = length(h);    %h 表示设线性相位的 FIR 数字滤波器的单位脉冲响应
L = (N-1)/2;
n = 0:N-1;
w = [0:500]*pi/500;    %在 0-pi 之间计算 501 个点
Hr = h*cos((L-n)*w);    %计算幅度函数
Th = -L*w;    %计算相位函数

```

**3 型和 4 型线性相位 FIR 滤波器的幅度函数和相位函数**，由式 A2-6 和式 A2-7 计算，计算方法如下

```

N = length(h);
L = (N-1)/2;
n = 0:N-1;
w = [0:500]*pi/500;
Hr = h*sin((L-n)*w);    %计算幅度函数
Th = pi/2-L*w;    %计算相位函数

```

**方法 2:** 直接利用 MATLAB 的 `zerophas` 函数计算幅度函数，相位函数仍由式 A2-5 和式 A2-7 计算。`zerophas` 函数的使用方法为

`[Hr,w] = zerophas(h)`  $h$  表示设线性相位的 FIR 数字滤波器的单位脉冲响应， $w$  为频率采样向量， $Hr$  为频率采样向量对应的幅度函数。

**例 EA2-1** 已知  $h(n) = \{3, -1, 2, -3, 5, -3, 2, -1, 3\}$ ，试用 MATLAB 绘制频率响应和幅度函数、相位函数图形。

**解:** 首先，利用函数 `freqz` 计算频率响应

```

>> h = [3,-1,2,-3,5,-3,2,-1,3];
>> [H,w] = freqz(h,1);

```

然后，采用 `zerophas` 函数计算幅度函数，根据  $h(n)$  可知这是 1 型线性相位滤波器，采用式 A2-5 计算相位函数

```

>> [Hr,w1] = zerophas(h);
>> N = length(h);
>> Th = -(N-1)/2*w1;
最后，绘制图形
>> subplot(221)
>> plot(w/pi,abs(H));
>> xlabel('\omega');ylabel('幅度响应');grid on
>> subplot(222)
>> plot(w/pi,angle(H));
>> xlabel('\omega');ylabel('相位响应');grid on
>> subplot(223)
>> plot(w1/pi,Hr);

```

```
>> xlabel('\omega');ylabel('幅度函数');grid on
>> subplot(224)
>> plot(w1/pi,Th);
>> xlabel('\omega');ylabel('相位函数');grid on
```

结果如图 A2-1 所示

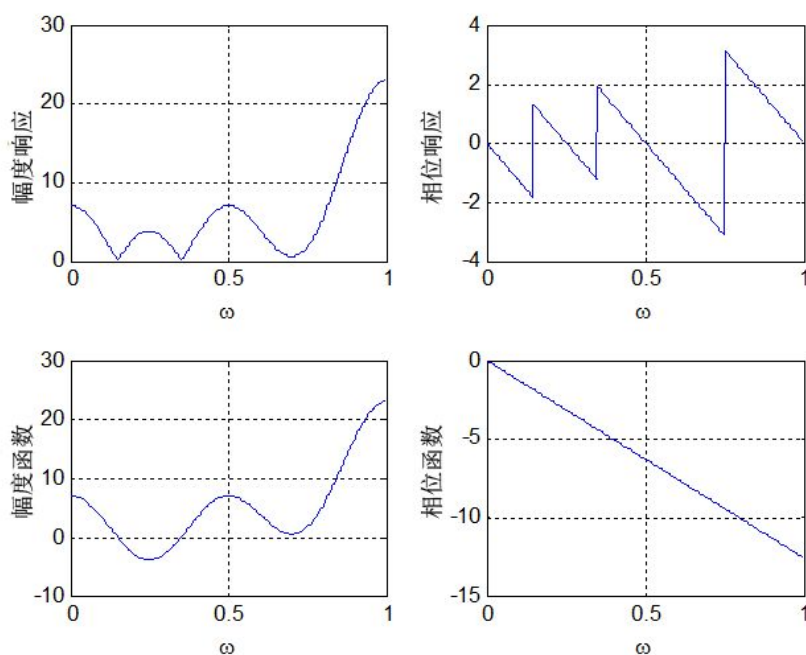


图 A2-1 频率响应和幅度函数、相位函数

可见  $H(\omega) = \pm |H(e^{j\omega})|$ ，相位响应是分段线性的，相位函数是完全线性的。

## 2. 窗函数法设计 FIR 数字滤波器

**基本原理：**

窗函数设计法的基本思想为，首先选择一个适当的理想的滤波器  $H_d(e^{j\omega})$ ，然后用窗函数截取它的单位脉冲响应  $h_d(n)$ ，得到线性相位和因果的 FIR 滤波器。这种方法的重点是选择一个合适的窗函数和理想滤波器，使设计的滤波器的单位脉冲响应逼近理想滤波器的单位脉冲响应。

**设计步骤：**

(1) 给定理想滤波器的频率响应  $H_d(e^{j\omega})$ ，在通带上具有单位增益和线性相位，在阻带上具有零响应。一个带宽为  $\omega_c$  ( $\omega_c < \pi$ ) 的低通滤波器由下式给定

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\alpha\omega} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (\text{A2-16})$$

其中  $\alpha$  为采样延迟，其作用是为了得到因果的系统。

(2) 确定这个滤波器的单位脉冲响应

$$h_d(n) = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \quad (\text{A2-17})$$

为了得到一个  $h(n)$  长度为  $N$  的因果的线性相位 FIR 滤波器，我们令

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \quad (\text{A2-18})$$

(3) 用窗函数截取  $h_d(n)$  得到所设计 FIR 数字滤波器  $h(n)$

$$h(n) = h_d(n)w(n) \quad (\text{A2-19})$$

### 窗函数的选择:

常用的窗函数有矩形 (Rectangular) 窗、汉宁 (Hanning) 窗、海明 (Hamming) 窗、布莱克曼 (Blackman) 窗、凯瑟 (Kaiser) 窗等。MATLAB 提供了一些函数用于产生窗函数，如表 A2-1 所示。

表 A2-1 MATLAB 中产生窗函数的命令

MATLAB 函数	窗函数	MATLAB 函数	窗函数
boxcar	矩形窗函数	blackman	布莱克曼窗函数
hanning	汉宁窗函数	kaiser	凯瑟窗函数
hamming	海明窗函数		

在设计过程中我们需要根据给定的滤波器技术指标，选择滤波器长度  $N$  和窗函数  $w(n)$ 。表 A2-2 列出了常用窗函数的一些特性，可供设计时参考。

表 A2-2 常用窗函数的特性

窗函数	窗函数频率特性		加窗后滤波器指标	
	旁瓣峰值 (dB)	主瓣宽度	过渡带宽	最小阻带衰减 (dB)
矩形窗	-13	$4\pi/N$	$1.8\pi/N$	-21
汉宁窗	-31	$8\pi/N$	$6.2\pi/N$	-44
海明窗	-41	$8\pi/N$	$6.6\pi/N$	-53
布莱克曼窗	-57	$12\pi/N$	$11\pi/N$	-74

凯瑟窗是一种在实际中广泛应用的窗函数，它由下式给定

$$w(n) = \frac{I_0 \left[ \beta \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2n}{N-1}\right)^2} \right]}{I_0[\beta]}, 0 \leq n \leq N-1 \quad (\text{A2-20})$$

其中  $I_0[x]$  是修正的零阶贝塞尔 (Bessel) 函数, 参数  $\beta$  控制最小阻带衰减, 这种窗函数对于相同的  $N$  可以提供不同的过渡带宽。由于贝塞尔函数比较复杂, 这种窗函数的设计方程很难推导, 然而幸运的是, 有一些经验设计方程可以直接使用。

已知给定的指标  $\omega_p$ ,  $\omega_{st}$ ,  $R_p$  和  $A_s$ , 滤波器长度  $N$  和凯瑟窗参数  $\beta$  可以按如下凯瑟窗设计方程给出

$$\text{过渡带宽: } \Delta\omega = \omega_{st} - \omega_p \quad (\text{A2-21})$$

$$N \approx \frac{A_s - 7.95}{2.285\Delta\omega} + 1 \quad (\text{A2-22})$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A_s - 8.7) & A_s \geq 50 \\ 0.5842(A_s - 21)^{0.4} + 0.07886(A_s - 21) & 21 < A_s < 50 \end{cases} \quad (\text{A2-23})$$

设计举例:

例 EA2-2 采用矩形窗设计一个数字 FIR 滤波器, 其技术指标如下

$$\omega_p = 0.2\pi, \quad R_p = 2\text{dB}$$

$$\omega_{st} = 0.3\pi, \quad A_s = 16\text{dB}$$

解: 首先, 根据矩形窗的性能指标确定滤波器长度  $N$

```
>> wp = 0.2*pi; wst = 0.3*pi;
```

```
>> tr_width = wst-wp;
```

```
>> N = ceil(1.8*pi/tr_width)+1
```

```
N =
```

```
19
```

根据式 A2-17 和式 A2-18 确定理想滤波器的单位脉冲响应  $h_d(n)$

```
>> n = 0:(N-1); wc = (wp+wst)/2;
```

```
>> alpha = (N-1)/2;
```

```
>> hd = (wc/pi)*sinc((wc/pi)*(n-alpha));
```

产生窗函数, 并对  $h_d(n)$  加窗得到  $h(n)$

```
>> w_boxcar = boxcar(N)';
```

```
>> h = hd.*w_boxcar;
```

我们将时域和频域的一些图形画出来，以确定设计出来的滤波器是否符合给定的指标

```
>> subplot(221);stem(n,hd,'filled');
>> axis tight;xlabel('n');ylabel('hd(n)');
>> [Hr,w1] = zerophase(h);
>> subplot(222);plot(w1/pi,Hr);
>> axis tight;xlabel('\omega/\pi');ylabel('H(\omega)');
>> subplot(223);stem(n,h,'filled');
>> axis tight;xlabel('n');ylabel('h(n)');
>> [H,w] = freqz(h,1);
>> subplot(224);plot(w/pi,20*log10(abs(H)/max(abs(H))));
>> xlabel('\omega/\pi');ylabel('dB');
>> grid on
```

结果如图 A2-2 所示

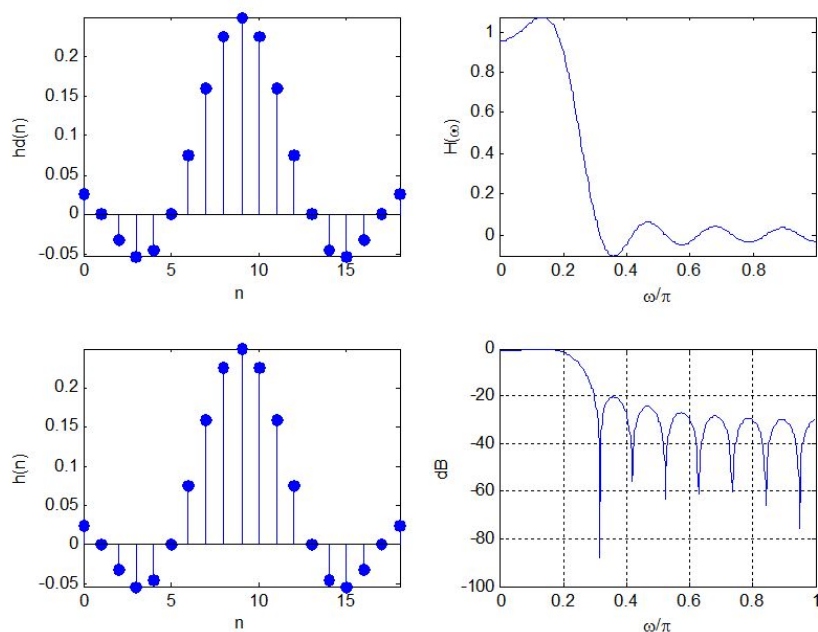


图 A2-2 例 EA2-2 实验结果

从滤波器频率特性曲线上可以读取到实际的阻带衰减约为 20dB，可见采用这种方法设计的滤波器满足给定的设计指标。

### 3. 频率取样法设计 FIR 数字滤波器

**基本原理：**

频率取样法从频域出发，把理想的滤波器  $H_d(e^{j\omega})$  等间隔采样得到  $H_d(k)$ ，将  $H_d(k)$  作为实际设计滤波器的  $H(k)$

$$H(k) = H_d(k) = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{A2-24})$$

得到  $H(k)$  以后可以由  $H(k)$  来唯一确定滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$ ， $H(e^{j\omega})$  也可以由  $H(k)$  求得

$$h(n) = \text{IDFT}[H(k)] \quad (\text{A2-25})$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \quad (\text{A2-26})$$

其中  $\phi(x)$  为内插函数

$$\phi(\omega) = \frac{\sin(N\omega/2)}{N \sin(\omega/2)} \cdot e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \quad (\text{A2-27})$$

由  $H(k)$  求得的频率响应  $H(e^{j\omega})$  将逼近  $H_d(e^{j\omega})$ 。

如果我们设计的是线性相位 FIR 滤波器，则  $H(k)$  的幅度和相位一定满足附录 2 中介绍的类型的线性相位滤波器的约束条件。

我们将  $H(k)$  表示成如下形式

$$H(k) = |H(k)|e^{j\theta(k)} = H_r(k)e^{j\theta(k)} \quad (\text{A2-28})$$

当  $h(n)$  为实数，则  $H(k) = H^*(N-k)$

由此得到

$$H_r(k) = H_r(N-k) \quad (\text{A2-29})$$

即  $H_r(k)$  以  $k = N/2$  为中心呈偶对称。再利用线性相位条件可知，对于 1 型和 2 型线性相位滤波器

$$\theta(k) = \begin{cases} -\left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi k}{N} & k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \\ \left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi}{N}(N-k) & k = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (\text{A2-30})$$

对 3 型和 4 型线性相位滤波器

$$\theta(k) = \begin{cases} \pm \frac{\pi}{2} - \left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi k}{N} & k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \\ \mp \frac{\pi}{2} + \left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi}{N}(N-k) & k = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (\text{A2-31})$$

其中， $\lfloor x \rfloor$  表示取小于该数的最大的整数，例如  $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ 。

### 设计步骤：

- (1) 由给定的理想滤波器给出  $H_r(k)$  和  $\theta(k)$ 。

(2) 由式 A2-28 求得  $H(k)$ 。

(3) 由式 A2-25 或式 A2-26 根据  $H(k)$  求得  $h(n)$  或  $H(e^{j\omega})$ 。

### 设计实例：

**例 EA2-3** 采用频率取样法设计 FIR 低通滤波器，设计指标为

$$\omega_p = 0.2\pi, \quad R_p = 1dB$$

$$\omega_{st} = 0.3\pi, \quad A_s = 50dB$$

**解：**这里我们试选取  $N = 20$ ，则取样间隔为  $(2\pi/N) = 0.1\pi$ ，在  $\omega_p$  和  $\omega_{st}$  处，即  $k = 2$  和  $k = 3$  处各有 1 个频率样本。这样通带  $[0, \omega_p]$  内有 3 个样本，阻带  $[\omega_{st}, \pi]$  内有 7 个样本，过渡带  $[\omega_p, \omega_{st}]$  内没有样本，从而可以得到

$$H_r(k) = [1, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{15\text{个}0}, 1, 1]$$

由于  $N = 20$  为偶数，所以我们设计一个 2 型线性相位滤波器，根据式 A2-30 有

$$\theta(k) = \begin{cases} -0.95\pi k & k = 0, \dots, 9 \\ 0.95\pi(20 - k) & k = 10, \dots, 19 \end{cases}$$

然后由式 A2-28 求得  $H(k)$ 。

编写的 MATLAB 代码如下

```
%Ex_9_1.m
N = 20; alpha = (N-1)/2; l = 0:N-1; wl = (2*pi/N)*l;
Hrs = [1,1,1,zeros(1,15),1,1]; %对理想滤波器幅度函数取样得到取样样本
Hdr = [1,1,0,0]; wdl = [0,0.25,0.25,1]; %用于绘制理想滤波器幅度函数曲线
k1 = 0:floor((N-1)/2); k2 = floor((N-1)/2)+1:N-1;
angH = [-alpha*(2*pi)/N*k1, alpha*(2*pi)/N*(N-k2)]; %计算 theta(k)
H = Hrs.*exp(j*angH); %计算 H(k)
h = ifft(H,N); %计算 h(n)
w = [0:500]*pi/500;
H = freqz(h,1,w); %计算频率响应
[Hr,wr] = zerophase(h); %计算设计滤波器的幅度函数
%绘图
subplot(221); plot(wdl,Hdr,wl(1:11)/pi,Hrs(1:11),'o');
axis([0,1,-0.1,1.1]); xlabel('\omega (\pi) '); ylabel('Hr(k)');
subplot(222); stem(1,h,'filled');
axis([0,N-1,-0.1,0.3]); xlabel('n'); ylabel('h(n)');
subplot(223); plot(wr/pi,Hr,wl(1:11)/pi,Hrs(1:11),'o');
axis([0,1,-0.2,1.2]); xlabel('\omega (\pi) '); ylabel('Hr(\omega)');
subplot(224); plot(w/pi,20*log10((abs(H)/max(abs(H)))));
```



```
axis([0,1,-50,5]);grid;xlabel('\omega (\pi) ');ylabel('dB');
```

结果如图 A2-3 所示

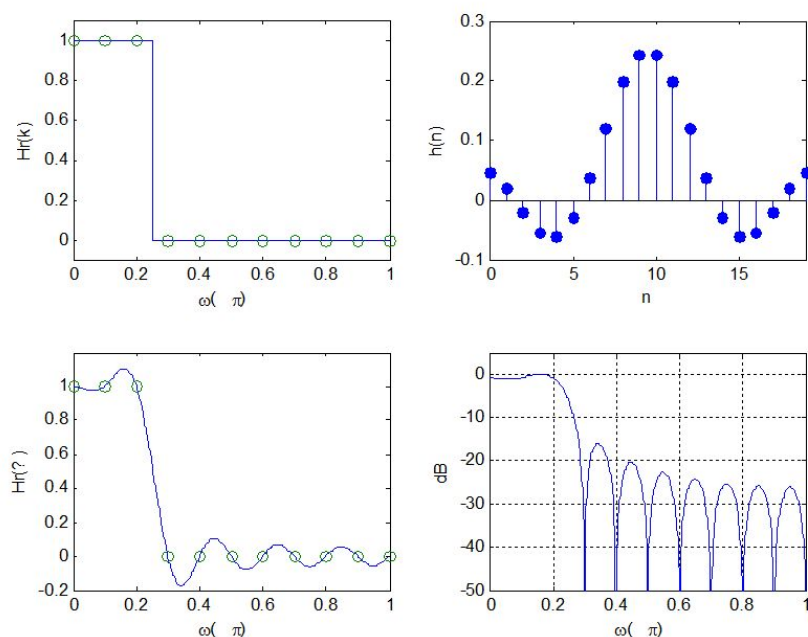


图 A2-3 例 EA2-3 实验结果

从结果图形中可以读取出阻带衰减约为 16dB，显然不满足给定的设计指标。

为了得到更大的衰减，必须增大  $N$ ，这样将使过渡带中出现样本。我们让过渡带上的样本成为自由样本，通过改变它们的值，以便在给定  $N$  的情况下取得最大的衰减，这种设计方法称为**过渡带取样的优化设计方法**。关于这些过渡带样本取值的优化问题，这里我们不讨论，在有些文献中已经给出了表格形式的解可供我们直接使用。

## 4. 利用 MATLAB 函数设计 FIR 数字滤波器

### (1) fir1 函数

MATLAB 提供了函数 `fir1` 采用窗函数法设计线性相位 FIR 数字滤波器，使用方法如下

```
h = fir1(N,Wn)
```

```
h = fir1(N,Wn>window)
```

```
h = fir1(N,Wn,'ftype')
```

```
h = fir1(N,Wn,'ftype',window)
```

$h$  为  $N$  阶 ( $N+1$  点) FIR 数字滤波器的单位脉冲响应， $Wn$  表示以  $\pi$  为单位的截止频率，`window` 指长度为  $N+1$  的窗函数，`ftype` 指定数字滤波器的类型，`window` 不指定时默认使用海明窗。

### (2) fir2 函数

`fir2` 函数结合频率取样法和窗函数法综合设计具有任意频率响应的 FIR 数字滤波器，使

用方法如下

$h = \text{fir2}(N,f,m)$

$h = \text{fir2}(N,f,m,\text{window})$

$h$  为  $N$  阶 ( $N+1$  点) FIR 数字滤波器的单位脉冲响应,  $f$  是给定的频率点向量,  $m$  是给定频率点对应的幅度值向量,  $\text{window}$  指长度为  $N+1$  的窗函数,  $\text{window}$  不指定时默认使用海明窗。

## 参考文献

- [1] 王世一. 数字信号处理 (修订版). 北京: 北京理工大学出版社, 2006.
- [2] 赵春晖, 陈立伟, 马惠珠, 万建. 数字信号处理 (第二版). 北京: 电子工业出版社, 2011.
- [3] Vinay K. Ingle, John G. Proakis. Digital Signal Processing Using MATLAB (英文影印版). 北京: 科学出版社, 2003.
- [4] 赵春晖, 乔玉龙, 崔颖. 数字信号处理学习指导及实验. 北京: 电子工业出版社, 2008.
- [5] 杨述斌, 李永全. 数字信号处理实践教程. 武汉: 华中科技大学出版社, 2007.