数字滤波器设计及 MATLAB 实现

主讲：范哲意

13810508095，funye@bit.edu.cn，逸夫楼 502/4-310

➢ 数字滤波器的基本概念

- 数字滤波器

- 两种类型频率选择数字滤波器

■ IIR（Infinite Impulse Response filter）

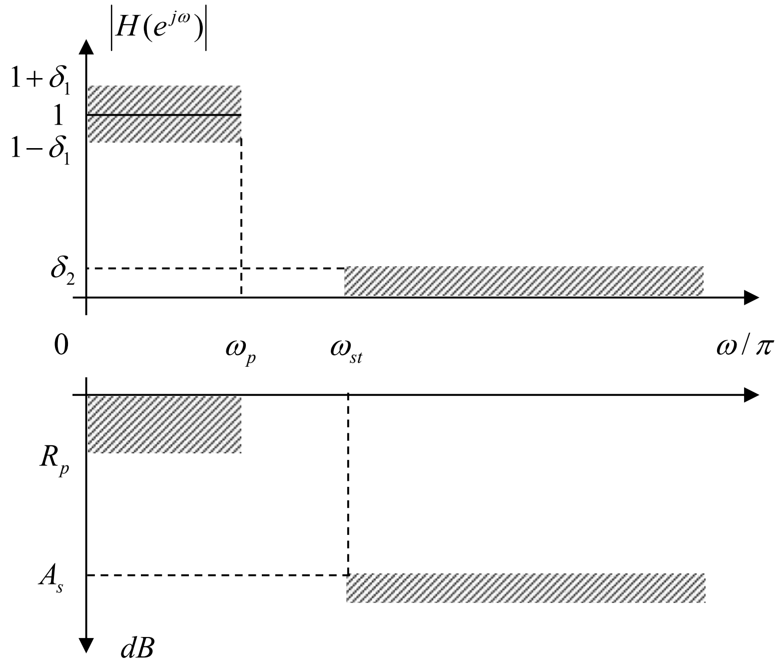
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

■ FIR（Finite Impulse Response filter）

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

- 数字滤波器设计过程

数字滤波器和模拟滤波器的一些指标



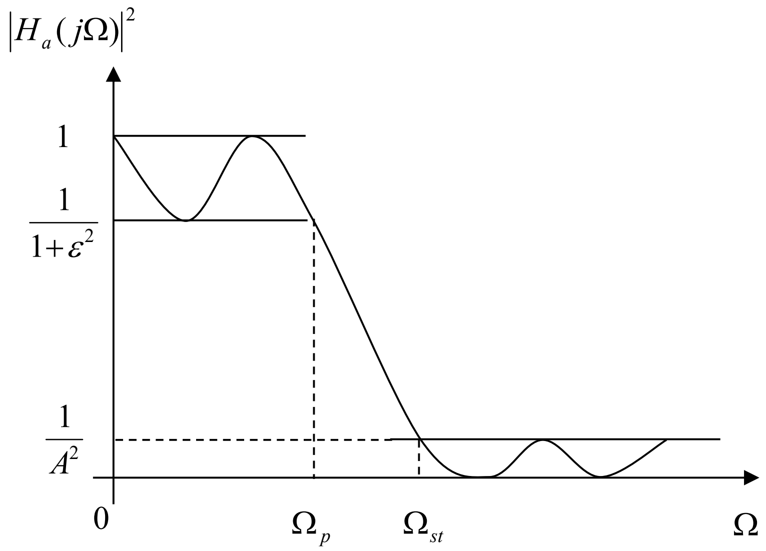
数字滤波器的幅频特性和技术指标

$[0,\omega_p]$称为通带，$[\omega_{st},\pi]$称为阻带，$[\omega_p,\omega_{st}]$为过渡带

δ_1为通带响应中的容限，δ_2为阻带的容限

R_p为通带波动，A_s为阻带衰减

$$R_p = -20\log_{10}\frac{1-\delta_1}{1+\delta_1} \qquad A_s = -20\log_{10}\frac{\delta_2}{1+\delta_1}$$



模拟滤波器的技术指标

ε为通带波动系数，Ω_p为通带截止频率，A为阻带衰减参数，Ω_{st}为阻带截止频率

$$R_p = -10\log_{10}\frac{1}{1+\varepsilon^2} \qquad \varepsilon = \sqrt{10^{R_p/10}-1}$$

$$A_s = -10\log_{10}\frac{1}{A^2} \qquad A = 10^{A_s/20}$$

➢ IIR 数字滤波器设计

IIR 滤波器设计的基本方法：先设计一个合适的模拟滤波器（模拟原型滤波器），然后利用复值映射把模拟滤波器变换成数字滤波器

模拟原型滤波器

■ 巴特沃斯滤波器

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|^2\Big|_{\Omega=s/j}$$

$$p_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)}, k = 0,1,2,\cdots,2N-1$$

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^{N}(s-p_k)}$$

```
[b,a] = butter(N,Wn,'s')
```

例 设计一个 $N=3$，$\Omega_c=0.5$ 的巴特沃斯模拟滤波器

■ 切比雪夫滤波器

切比雪夫Ⅰ型滤波器

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2 c_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

$$c_N(x)=\begin{cases}\cos(N\cos^{-1}x) & 0<x\le 1\\ ch(Nch^{-1}x) & x>1\end{cases}$$

切比雪夫Ⅱ型滤波器

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\left[\varepsilon^2 c_N^2\left(\frac{\Omega_c}{\Omega}\right)\right]^{-1}}$$

```
[b,a] = cheby1(N,Rp,Wn,'s')
[b,a] = cheby2(N,As,Wn,'s')
```

■ 椭圆滤波器

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2 U_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

$U_N(x)$为N阶雅可比（Jacobian）椭圆函数

```
[b,a] = ellip(N,Rp,As,Wn,'s')
```

模拟滤波器到数字滤波器的变换

由 $H_a(s)$ 进一步求得 $H(z)$，由 s 平面到 z 平面的变换

■ 脉冲响应不变法

基本原理：从时域响应出发，使数字滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 模仿模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$， $h(n)$ 等于 $h_a(t)$ 的取样值。

变换方法： $H_a(s)\xrightarrow{\text{拉氏反变换}}h_a(t)\xrightarrow{\text{时域采样}}h_a(nT)=h(n)\xrightarrow{z\text{变换}}H(z)$

（1）将 $H_a(s)$ 进行部分分式展开

$$H_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-p_k}$$

（2）对 $H_a(s)$ 进行拉氏反变换

$$h_a(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{p_k t}u(t)$$

（3）对 $h_a(t)$ 时域采样得到 $h(n)$

$$h(n)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{p_k nT}u(nT)=\sum_{k=1}^{N}A_k\left(e^{p_k T}\right)^n u(n)$$

（4）对 $h(n)$ 进行 z 变换

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-e^{p_k T}z^{-1}}$$

变换关系：

$$\frac{1}{s-s_k}\Leftrightarrow\frac{1}{1-e^{s_k T}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{s_k T}}$$

设计步骤：

（1）确定数字滤波器性能指标 ω_p， ω_{st}， R_p 和 A_s 。

（2）将数字滤波器频率指标转换成相应的模拟滤波器频率指标

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{T} \qquad \Omega_{st} = \frac{\omega_{st}}{T}$$

（3）根据指标 Ω_p，Ω_{st}，R_p 和 A_s 设计模拟滤波器 $H_a(s)$

（4）将 $H_a(s)$ 展成部分分式形式

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - p_k}$$

（5）把模拟极点 p_k 转换成数字极点 $e^{p_k T}$，得到数字滤波器

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

需要注意的几个问题：

（1）数字滤波器频率指标转换成相应的模拟滤波器频率指标

$$\Omega = \frac{\omega}{T}$$

（2）模拟滤波器设计方程

巴特沃斯低通滤波器：

$$N = \left\lceil \frac{\log_{10}\left[\left(10^{R_p/10} - 1\right) \Big/ \left(10^{A_s/10} - 1\right)\right]}{2\log_{10}\left(\Omega_p / \Omega_{st}\right)} \right\rceil$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{R_p/10} - 1}} \quad \text{or} \quad \Omega_c = \frac{\Omega_{st}}{\sqrt[2N]{10^{A_s/10} - 1}}$$

切比雪夫 I 型滤波器

$$\varepsilon = \sqrt{10^{R_p/10} - 1} \qquad A = 10^{A_s/20}$$

$$N=\left\lceil \frac{\operatorname{arccos} h\left(\sqrt{A^2-1}/\varepsilon\right)}{\operatorname{arccos} h\left(\Omega_{st}/\Omega_p\right)} \right\rceil$$

$$\Omega_c=\Omega_p$$

切比雪夫II型滤波器

$$\Omega_c=\Omega_{st}$$

椭圆滤波器

$$\Omega_c=\Omega_p$$

$$N=\left\lceil \frac{K(k)K(\sqrt{1-k_1^2})}{K(k_1)K(\sqrt{1-k^2})} \right\rceil$$

$$k=\frac{\Omega_p}{\Omega_{st}}, \qquad k_1=\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}, \qquad K(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}$$

$K(x)$ 为完全 I 型椭圆积分，函数 ellipke 用于计算该积分

（3）脉冲响应不变法

residue 函数

[r,p,k] = residue(b,a)

[b,a] = residue(r,p,k)

$$H(s)=\frac{b_M s^M+b_{M-1}s^{M-1}+\cdots+b_0}{a_N s^N+a_{N-1}s^{N-1}+\cdots+a_0}$$

$$H(s)=\frac{r_1}{s-p_1}+\frac{r_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{r_N}{s-p_N}+k(s)$$

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_M z^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_N z^{-N}}$$

$$H(z)=\frac{r_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{r_2}{1-p_2z^{-1}}+\cdots+\frac{r_N}{1-p_Nz^{-1}}+k_1+k_2z^{-1}+\cdots$$

impinvar 函数

[bz,az] = impinvar(b,a,fs)

[bz,az] = impinvar(b,a)　采样频率默认为 1

■ 双线性变换法

基本原理:

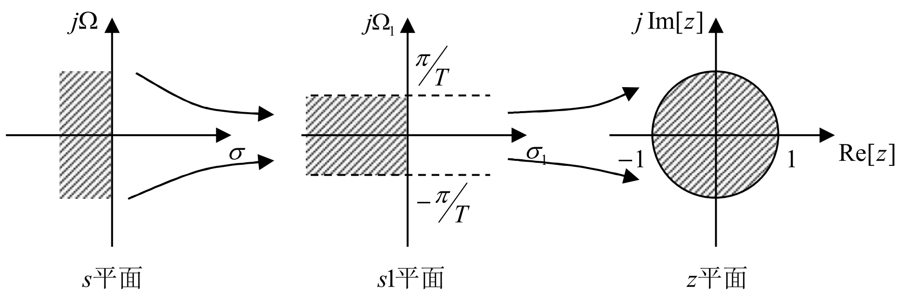
从频率响应出发，直接使数字滤波器的频率响应逼近模拟滤波器的频率响应，进而求得数字滤波器的系统函数 $H(z)$。

变换方法:

(1)通过正切变换 $\Omega=\tan(\Omega_1 T/2)$ 将 s 平面的整个虚轴 $j\Omega$ 压缩到 s1 平面 $j\Omega_1$ 轴上的 $-j\pi/T$ 到 $j\pi/T$ 段上。

(2) 通过 $z=e^{s1T}$ 变换将 s1 平面映射到 z 平面上，得到 s 平面和 z 平面的映射关系为

$$s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$



双线性变换的映射关系

设计步骤:

(1) 确定数字滤波器性能指标 ω_p， ω_{st}， R_p 和 A_s。

(2) 根据频率的非线性关系，确定预畸的模拟滤波器频率指标

$$\Omega_p=\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) \qquad \Omega_{st}=\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_{st}}{2}\right)$$

（3）根据指标Ω_p，Ω_{st}，R_p和A_s设计模拟滤波器$H_a(s)$

（4）将双线性变换关系代入，得到$H(z)$

$$H(z)=H_a\left(\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

需要注意的几个问题：

（1）数字滤波器频率指标转换成相应的模拟滤波器频率指标

$$\Omega=\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

（2）模拟滤波器设计方程

（3）双线性变换法

bilinear 函数

[bz,az] = bilinear(b,a,fs)

直接利用 MATLAB 函数设计 IIR 数字滤波器

[b,a] = butter(N,Wn)　设计低通巴特沃斯数字滤波器

[b,a] = cheby1(N,Rp,Wn)　设计低通切比雪夫 I 型数字滤波器

[b,a] = cheby2(N,As,Wn,)　设计低通切比雪夫 II 型数字滤波器

[b,a] = ellip(N,Rp,As,Wn)　设计低通椭圆数字滤波器

其中，N 表示滤波器的阶数；Wn 表示取值在 0~1 之间的截止频率（以π为单位），当 Wn 为包含两个元素的向量[W1 W2]时，表示设计带通数字滤波器，通带介于 W1 和 W2 之间。

[b,a] = butter(N,Wn,'ftype') 设计巴特沃斯数字滤波器

[b,a] = cheby1(N,Rp,Wn,'ftype') 设计切比雪夫Ⅰ型数字滤波器

[b,a] = cheby2(N,As,Wn,'ftype') 设计切比雪夫Ⅱ型数字滤波器

[b,a] = ellip(N,Rp,As,Wn,'ftype') 设计椭圆数字滤波器

'ftype'表示数字滤波器的类型，可选选项有'high'、'low'、'stop'，分别表示高通、低通、带阻，设计带阻滤波器时，Wn 为包含两个元素的向量[W1 W2]，阻带介于 W1 和 W2 之间。

[N,Wn] = buttord(Wp,Wst,Rp,As) 根据数字滤波器设计指标给出数字巴特沃斯滤波器的阶数 N 和截止频率 Wn

[N,Wn] = cheb1ord(Wp,Wst,Rp,As) 根据数字滤波器设计指标给出数字切比雪夫Ⅰ型滤波器的阶数 N 和截止频率 Wn

[N,Wn] = cheb2ord(Wp,Wst,Rp,As) 根据数字滤波器设计指标给出数字切比雪夫Ⅱ型滤波器的阶数 N 和截止频率 Wn

[N,Wn] = ellipord(Wp,Wst,Rp,As) 根据数字滤波器设计指标给出数字椭圆滤波器的阶数 N 和截止频率 Wn

其中，Wp 和 Wst 分别表示通带和阻带截止频率，Rp 表示通带波动，As 表示阻带衰减。

➢ IR 数字滤波器设计

线性相位 FIR 数字滤波器

$$h(n)=h(N-1-n) \qquad \text{偶对称}$$

$$h(n)=-h(N-1-n) \qquad \text{奇对称}$$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega})=\pm\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\theta(\omega)}=H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

- $h(n)$ 偶对称时，幅度函数和相位函数为

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{N-1}h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$\theta(\omega)=-\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega$$

- $h(n)$ 奇对称时，幅度函数和相位函数为

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{N-1}h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$\theta(\omega)=-\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega+\frac{\pi}{2}$$

- 幅度函数

a）$h(n)$ 偶对称，N 为奇数（1 型）

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2}a(n)\cos(\omega n)$$

$$a(0)=h\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

$$a(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right),\ n=1,2,\cdots,\frac{N-1}{2}$$

b）$h(n)$ 偶对称，N 为偶数（2 型）

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2} b(n)\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

$$b(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right),\ n=1,2,\cdots,\frac{N}{2}$$

c）$h(n)$ 奇对称，N 为奇数（3 型）

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2} c(n)\sin(n\omega)$$

$$c(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right),\ n=1,2,\cdots,\frac{N-1}{2}$$

d）$h(n)$ 奇对称，N 为偶数（4 型）

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2} d(n)\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$d(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right),\ n=1,2,\cdots,\frac{N}{2}$$

zerophase 函数

[Hr,w] = zerophase(h)　h 表示设线性相位的 FIR 数字滤波器的单位脉冲响应，w 为频率采样向量，Hr 为频率采样向量对应的幅度函数。

例 $h(n)=\{3,-1,2,-3,5,-3,2,-1,3\}$

窗函数法设计 FIR 数字滤波器

基本原理： 窗函数设计法的基本思想为，首先选择一个适当的理想的滤波器 $H_d(e^{j\omega})$，然后用窗函数截取它的单位脉冲响应 $h_d(n)$，得到线性相位和因果的 FIR 滤波器。这种方法的重点是选择一个合适的的窗函数和理想滤波器，使设计的滤波器的单位脉冲响应逼近

理想滤波器的单位脉冲响应。

设计步骤：

（1）给定理想滤波器的频率响应$H_d(e^{j\omega})$，在通带上具有单位增益和线性相位，在阻带上具有零响应。一个带宽为ω_c（$\omega_c<\pi$）的低通滤波器由下式给定

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}1\cdot e^{-j\alpha\omega} & |\omega|\le\omega_c \\ 0 & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

其中α为采样延迟，其作用是为了得到因果的系统。

（2）确定这个滤波器的单位脉冲响应

$$h_d(n)=\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$$

为了得到一个$h(n)$长度为N的因果的线性相位 FIR 滤波器，我们令

$$\alpha=\frac{N-1}{2}$$

（3）用窗函数截取$h_d(n)$得到所设计 FIR 数字滤波器$h(n)$

$$h(n)=h_d(n)w(n)$$

MATLAB 中产生窗函数的命令

MATLAB 函数	**窗函数**	**MATLAB 函数**	**窗函数**
boxcar	矩形窗函数	blackman	布莱克曼窗函数
hanning	汉宁窗函数	kaiser	凯瑟窗函数
hamming	海明窗函数		

常用窗函数的特性

窗函数	窗函数频率特性		加窗后滤波器指标	
	旁瓣峰值（dB）	主瓣宽度	过渡带宽	最小阻带衰减（dB）
矩形窗	-13	$4\pi/N$	$1.8\pi/N$	-21
汉宁窗	-31	$8\pi/N$	$6.2\pi/N$	-44
海明窗	-41	$8\pi/N$	$6.6\pi/N$	-53
布莱克曼窗	-57	$12\pi/N$	$11\pi/N$	-74

凯瑟窗设计方程：

过渡带宽：$\Delta\omega = \omega_{st} - \omega_p$

$$N \approx \frac{A_s - 7.95}{2.285\Delta\omega} + 1$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A_s - 8.7) & A_s \ge 50 \\ 0.5842(A_s - 21)^{0.4} + 0.07886(A_s - 21) & 21 < A_s < 50 \end{cases}$$

频率取样法设计 FIR 数字滤波器

基本原理：

频率取样法从频域出发，把理想的滤波器 $H_d(e^{j\omega})$ 等间隔采样得到 $H_d(k)$，将 $H_d(k)$ 作为实际设计滤波器的 $H(k)$

$$H(k) = H_d(k) = H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

得到 $H(k)$ 以后可以由 $H(k)$ 来唯一确定滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$

利用 MATLAB 函数设计 FIR 数字滤波器

■ fir1 函数

MATLAB 提供了函数 fir1 采用窗函数法设计线性相位 FIR 数字滤

波器，使用方法如下

```
h = fir1(N,Wn)
h = fir1(N,Wn,window)
h = fir1(N,Wn,'ftype')
h = fir1(N,Wn,'ftype',window)
```

h 为 N 阶（N+1 点）FIR 数字滤波器的单位脉冲响应，Wn 表示以 pi 为单位的截止频率，window 指长度为 N+1 的窗函数，ftype 指定数字滤波器的类型，window 不指定时默认使用海明窗。

Wn=[w1,w2]，带通

ftype：’high’高通，’stop’带阻

■ fir2 函数

fir2 函数结合频率取样法和窗函数法综合设计具有任意频率响应的 FIR 数字滤波器，使用方法如下

```
h = fir2(N,f,m)
h = fir2(N,f,m,window)
```

h 为 N 阶（N+1 点）FIR 数字滤波器的单位脉冲响应，f 是给定的频率点向量，m 是给定频率点对应的幅度值向量，window 指长度为 N+1 的窗函数，window 不指定时默认使用海明窗。

■ kaiserord 函数

kaiserord 函数用于求取凯瑟窗设计参数，使用方法如下

```
[N,Wn,beta,ftype]=kaiserord(f,a,dev)
[N,Wn,beta,ftype]=kaiserord(f,a,dev,Fs)
```

f 过渡带的起点和终点

a 指定频率段内的幅度值

dev 指定频率段内的幅度值允许误差

Fs 采样频率，没有指定取归一化频率[0,1]

➢ FDATool