LTI 系统的频域、s/z 域分析
及 MATLAB 实现

主讲：范哲意

13810508095，funye@bit.edu.cn，逸夫楼 502/4-310

➢1. 连续时间系统的频率响应

系统的频率响应

■ 系统单位冲激响应傅里叶变换

$$H(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau$$

反映了 LTI 连续时间系统对不同频率信号的响应特性，是系统内在固有的特性，与外部激励无关。

■ 幅度响应、相位响应

$$H(j\Omega)=|H(j\Omega)|e^{j\theta(\Omega)}$$

■ $y(t)=x(t)*h(t)\rightarrow\ \ Y(\Omega)=X(\Omega)H(j\Omega)\rightarrow\ \ H(j\Omega)=Y(\Omega)/X(\Omega)$

■ 虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 作用于 LTI 系统时

$$y(t)=e^{j\Omega t}H(j\Omega)$$

- freqs 函数

LTI 连续时间系统：

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)}(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m x^{(m)}(t)$$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{b_M (j\Omega)^M + b_{M-1}(j\Omega)^{M-1} + \cdots + b_1 j\Omega + b_0}{a_N (j\Omega)^N + a_{N-1}(j\Omega)^{N-1} + \cdots + a_1 j\Omega + a_0}$$

b、a 表示有理多项式中分子和分母多项式的系数向量

[h,w] = freqs(b,a)　默认频率范围内，200 个频率点上的频率响应的取样值

h = freqs(b,a,w)　w 为频率取样点，h 是频率响应在频率取样点上的数值向量。

[h,w] = freqs(b,a,n)　默认频率范围内 n 个频率点上的频率响应的取样值，这 n 个频率点记录在 w 中。

freqs(b,a,…)　不返回频率响应的取样值，以对数坐标的方式绘出系统的幅频响应和相频响应。

例　三阶归一化 Butterworth 低通滤波器的频率响应：

$$H(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1}$$

2. 离散时间系统的频率响应

- 系统的频率响应

单位抽样响应的离散时间傅里叶变换

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega})=Y(e^{j\omega})/X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega})=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\theta(\omega)}$$

当系统输入信号为 $x(n)=e^{j\omega n}$ 时，系统的输出：

$$y(n)=e^{j\omega n}*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\omega(n-k)}h(k)=e^{j\omega n}H(e^{j\omega})$$

虚指数信号通过 LTI 离散时间系统后信号的频率不变，信号的幅度有系统频率响应的幅度值确定，所以 $H(e^{j\omega})$ 表示了系统对不同频率信号的衰减量。

freqz 函数

LTI 离散系统：

$$\sum_{i=0}^{N}a_i y(n-i)=\sum_{j=0}^{M}b_j x(n-j)$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{b_0+b_1e^{-j\omega}+\cdots+b_Me^{-jM\omega}}{a_0+a_1e^{-j\omega}+\cdots+a_Ne^{-jN\omega}}$$

b、a 分别为有理多项式中分子和分母多项式的系数向量

[H,w] = freqz(b,a,n)　H 是频率响应在 0 到 pi 范围内 n 个频率等分点上的数值向量，w 包含了这 n 个频率点。

[H,w] = freqz(b,a,n,'whole')　计算 0 到 2π 之间 n 个频率点上的频率响应的取样值，这 n 个频率点记录在 w 中。

H = freqz(b,a,w)　w 为频率取样点，计算这些频率点上的频率响应的取样值。

freqz(b,a,…)　不返回频率响应的取样值，直接绘出系统的幅频响应和相频响应。

例 离散时间系统的频率响应：

$$H(e^{j\omega})=\frac{0.0441e^{-j\omega}+0.0317e^{-j2\omega}}{1-2.0204e^{-j\omega}+1.4641e^{-j2\omega}-0.3679e^{-j3\omega}}$$

➢ 3. 连续时间系统的 s 域分析

拉普拉斯变换

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds$$

■ laplace、ilaplace 函数

L = laplace(F) 符号表达式 F 的拉氏变换，F 中时间变量为 t，返回变量为 s 的结果表达式。

L = laplace(F,t) 用 t 替换结果中的变量 s。

F = ilaplace(L) 以 s 为变量的符号表达式 L 的拉氏反变换，返回时间变量为 t 的结果表达式。

F = ilaplace(L,x) 用 x 替换结果中的变量 t。

例 $x(t)=e^{-t}\sin(at)u(t)$ 的拉氏变换。

■ 部分分式法求拉氏反变换

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_Ms^M+b_{M-1}s^{M-1}+\cdots+b_0}{a_Ns^N+a_{N-1}s^{N-1}+\cdots+a_0}$$

部分分式展开：

$$X(s)=\frac{r_1}{s-p_1}+\frac{r_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{r_N}{s-p_N}+k_0+k_1s+\cdots+k_{M-N}s^{M-N}$$

常用拉氏变换对

residue 函数：

[r,p,k] = residue(b,a)　b、a 为分子和分母多项式系数向量，r、p、k 分别为上述展开式中的部分分式系数、极点和直项多项式系数。

例 用部分分式展开法求单边拉氏变换的反变换

$$X(s)=\frac{s-2}{s(s+1)^3}$$

连续时间系统的系统函数

系统单位冲激响应的拉氏变换：

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-st}dt$$

$$H(s)=Y(s)/X(s)$$

从复频域反应了系统的固有性质

$$H(s)=\frac{b_M s^M+b_{M-1}s^{M-1}+\cdots+b_0}{a_N s^N+a_{N-1}s^{N-1}+\cdots+a_0}$$

连续时间系统的零极点分析

零点：分子多项式为零的点，使系统函数的值为零

极点：分母多项式为零的点，使系统函数的值无穷大

零极点分布图：将系统函数的零极点绘在 s 平面上，零点用○表示，极点用×表示

■ roots 函数：

r = roots(c)　c 为多项式的系数向量，返回值 r 为多项式的根向量。

■ pzmap 函数

pzmap(sys)　绘出由系统模型 sys 描述的系统的零极点分布图

[p,z] = pzmap(sys)　这种调用方法返回极点和零点，而不绘出零极点分布图

其中 sys 为系统传函模型，sys=tf(b,a)

■ tf2zp、zp2tf 函数

系统传递函数模型和零极点增益模型的转换

[z,p,k] = tf2zp(b,a)

[b,a] = tf2zp(z,p,k)

其中 b、a 为传递函数的分子多项式和分母多项式的系数向量，返回值 z 为零点列向量，p 为极点列向量，k 为系统函数零极点形式的增益。

➢4. 离散时间系统的 z 域分析

z 变换

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{r}X(z)z^{n-1}dz$$

■ ztrans、iztrans 函数

Z = ztrans(F)　求符号表达式 F 的 Z 变换。

F = iztrans(Z) 求符号表达式 F 的 Z 反变换。

例 $x(n)=(n-3)u(n)$ 的 Z 变换。

■ 部分分式法求 z 反变换

residue 函数部分分式展开，常用变换对

例 用部分分式展开法求 z 反变换

$$X(z)=\frac{z^2}{(z-0.5)(z-0.25)},\quad |z|>0.5$$

离散时间系统的系统函数

单位抽样响应的 Z 变换：

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

$$H(z)=Y(z)/X(z)$$

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}$$

离散时间系统的零极点分析

零点：使系统函数分子多项式为零的点

极点：使系统函数分母多项式为零的点

■ roots 函数

■ zplane 函数

zplane(b,a)　b、a 为系统函数的分子、分母多项式的系数向量（行向量）。

zplane(z,p)　z、p 为零极点序列（列向量）

例 $H(z)=\frac{z^2-z}{z^2-0.75z+0.125}$

例 $H(z)=\frac{z(z-1.2)}{(z-0.8)(z+0.8)}$

- 离散系统特性分析工具

```
fvtool(b,a)
```