信号的频谱分析及 MATLAB 实现

主讲：范哲意

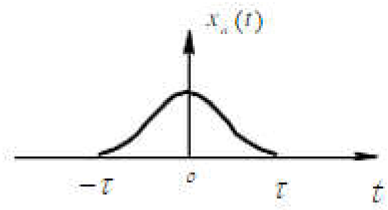
13810508095，funye@bit.edu.cn，逸夫楼 502/4-310

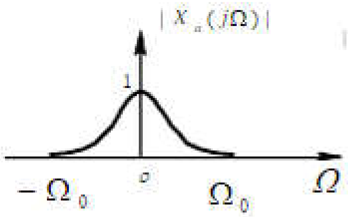
➢ 1. 傅里叶变换的几种形式

- 非周期连续时间信号 － FT

$$X_a(j\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_a(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$x_a(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_a(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

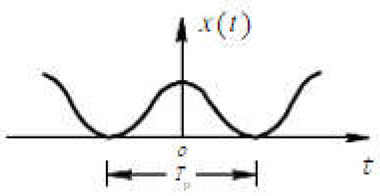


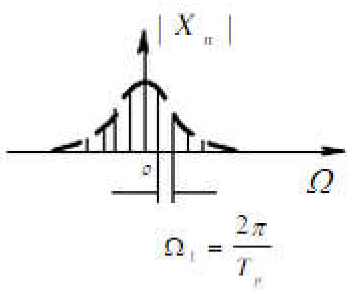


- 周期连续时间信号 － FS

$$x_a(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}C_k e^{jk\Omega_0 t}$$

$$C_k=\frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{+T_p/2}x_a(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt \qquad \Omega_0\overset{\triangle}{=}\frac{2\pi}{T}$$

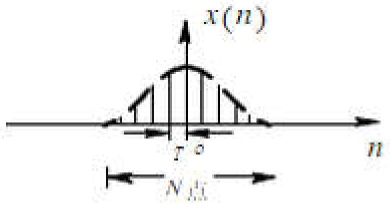


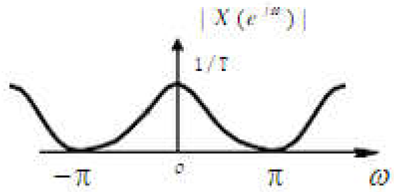


- 非周期离散时间信号 - DTFT

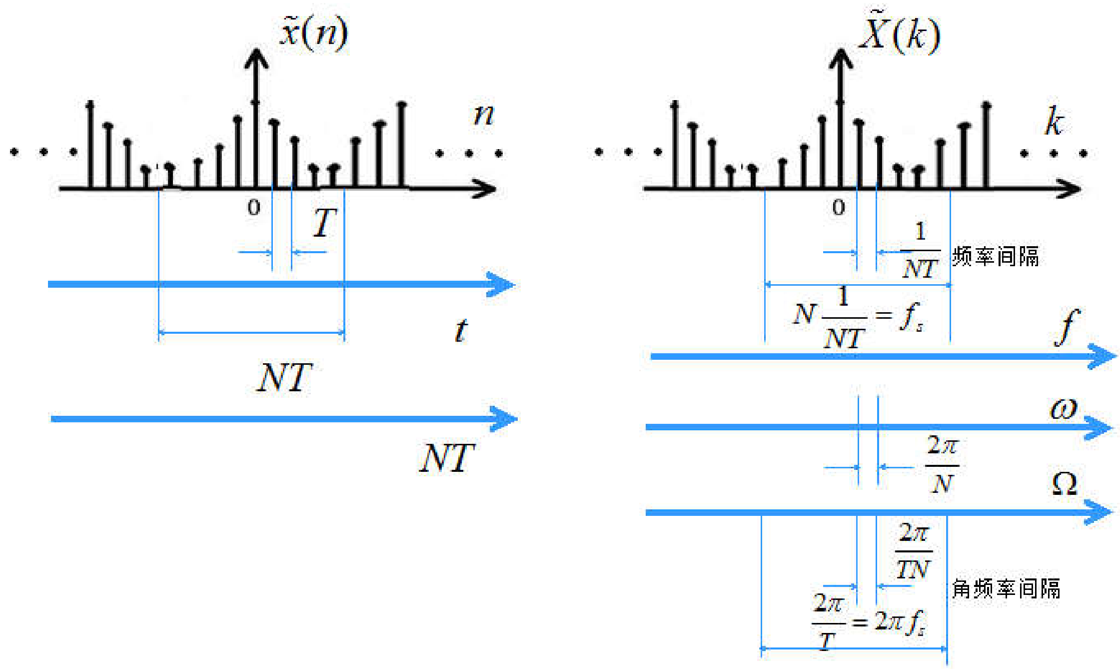
$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$





- 周期离散时间信号 - DFS ->DFT/FFT



➢ 四种傅里叶变换的 MATLAB 实现

- 周期连续时间信号 - FS

quad 函数　计算数值积分

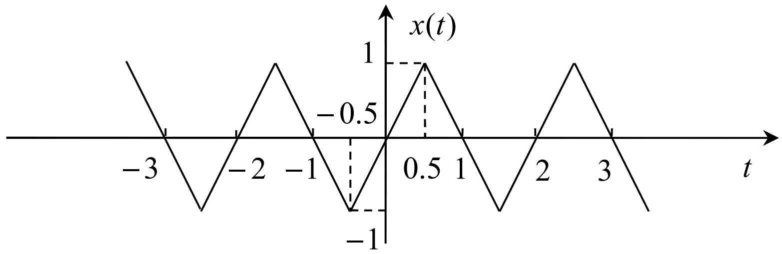
y = quad(fun,a,b)

y = quad(fun,a,b,TOL,TRACE,p1,p2,…)

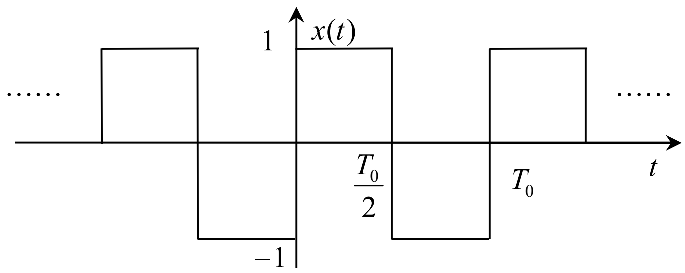
Fun 被积函数，a、b 定积分的下限和上限，TOL 允许的相对或绝对积分

误差，TRACE 以被积函数的点绘图形式来跟踪该函数的返回值，p1,p2,… 被积函数除时间 t 之外所需的其他额外输入参数

■ 例：



■ 例：



非周期连续时间信号 - FT

■ 符号运算

fourier 函数、ifourier 函数、int 函数

■ 数值积分

quad 函数

■ 数值近似

非周期离散时间信号 - DTFT

周期离散时间信号 - DFS ->DFT/FFT

fft 函数

➢ 利用 DFT/FFT 分析信号频谱

利用 DFT/FFT 分析 DTFT

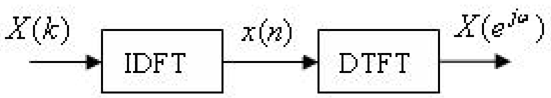
$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

■ 频域内插：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\right]e^{-j\omega n}$$

$$\to\quad x(e^{j\omega})=\sum_{k=1}^{N}X(k)\phi(\omega-\frac{2\pi k}{N})\qquad \phi(\omega)=\frac{\sin(N\omega/2)}{N\sin(\omega/2)}\cdot e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$



■ 更简单的方法：

直接利用 DFT（包络）来近似计算 DTFT

<u>栅栏效应</u>

增加数据的长度，得到的 DFT 谱线就更加精细

利用 DFT/FFT 分析 FT

$$\begin{tikzcd}
x_a(t) \arrow[r, leftrightarrow, "?"] \arrow[d, leftrightarrow] & x(n),0\le n\le N-1 \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, bend left] & \\
X_a(j\Omega) \arrow[r, leftrightarrow, "?"] & X(e^{j\omega}) & X(k) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

■ 信号的采样与恢复

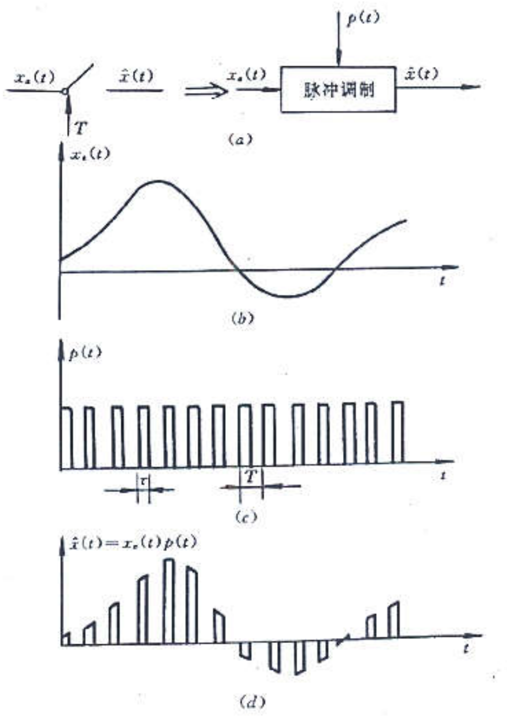


图 2—1 用一定宽度的脉冲进行取样得出的取样信号
(a) 信号取样原理图 (b) 连续时间信号 $x_a(t)$ 波形
(c) 取样脉冲 $p(t)$ 波形 (d) 取样信号 $\hat{x}(t)$ 波形

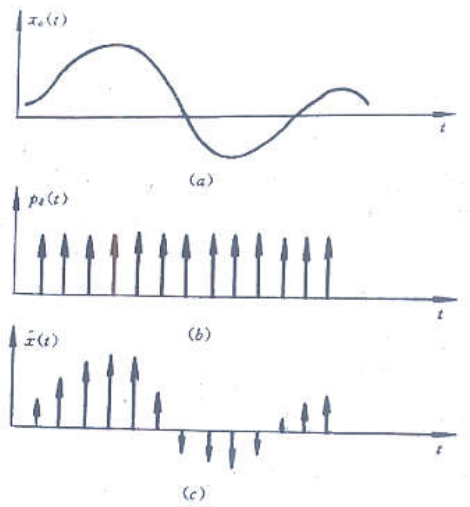
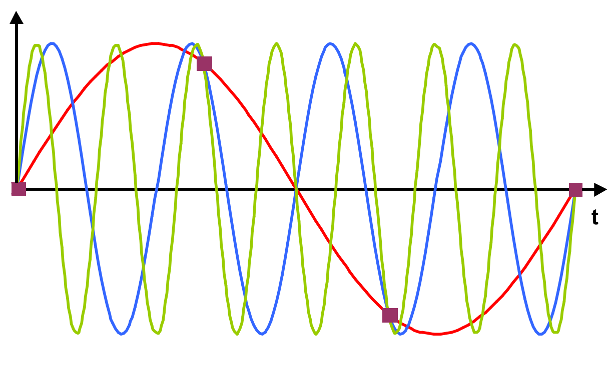


图 2—2 利用理想冲激取样所得的取样信号
(a) 连续时间信号 $x_a(t)$ 波形 (b) 冲激函数 $p_\delta(t)$ 波形
(c) 理想冲激取样信号 $\hat{x}(t)$ 波形

$$p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= x_a(t)\,p_\delta(t) \\ &= x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\,\delta(t-nT)\end{aligned}$$

采样失真？



$$p_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m e^{jm\frac{2\pi}{T}t}$$
$$=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{jm\frac{2\pi}{T}t}$$

$$\hat{X}(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}(t)e^{-j\Omega t}dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)p_\delta(t)e^{-j\Omega t}dt$$
$$=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{jm\frac{2\pi}{T}t}e^{-j\Omega t}dt$$
$$=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-j(\Omega-m\Omega_s)t}dt \qquad \boxed{\Omega_s=\frac{2\pi}{T}}$$

$$\hat{X}(j\Omega)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-j(\Omega-m\Omega_s)t}dt$$
$$=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-j(\Omega-m\Omega_s)t}dt$$

$$X_a(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-j\Omega t}dt \qquad \hat{X}(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_a\left[j(\Omega-m\Omega_s)\right]$$

结论：1/T，周期延拓

$$\hat{x}(t)=x_a(t)p_\delta(t) \quad\rightarrow\quad \hat{X}(j\Omega)=FT[x_a(t)]*FT[p_\delta(t)]$$

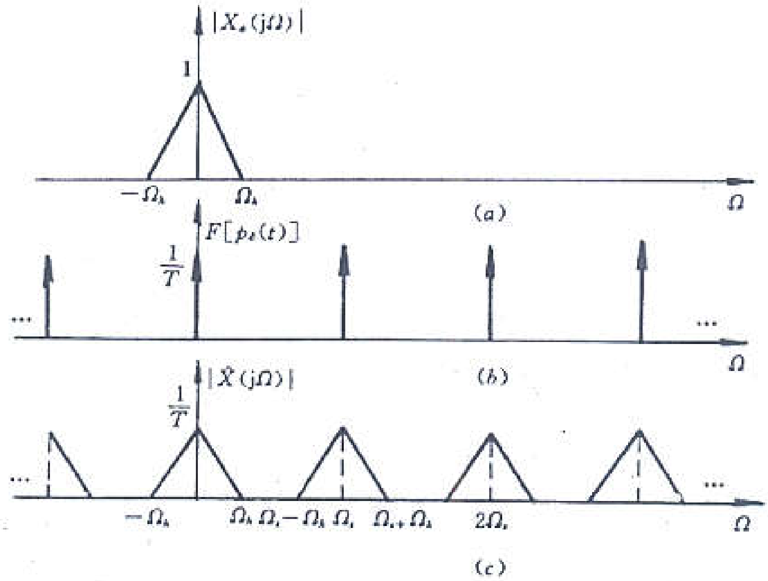


图 2—3　理想取样信号的频谱
（a）原连续时间信号 $x_a(t)$ 的频谱　（b）$p_\delta(t)$ 的梳状谱
（c）理想取样信号 $\hat{x}(t)$ 的频谱

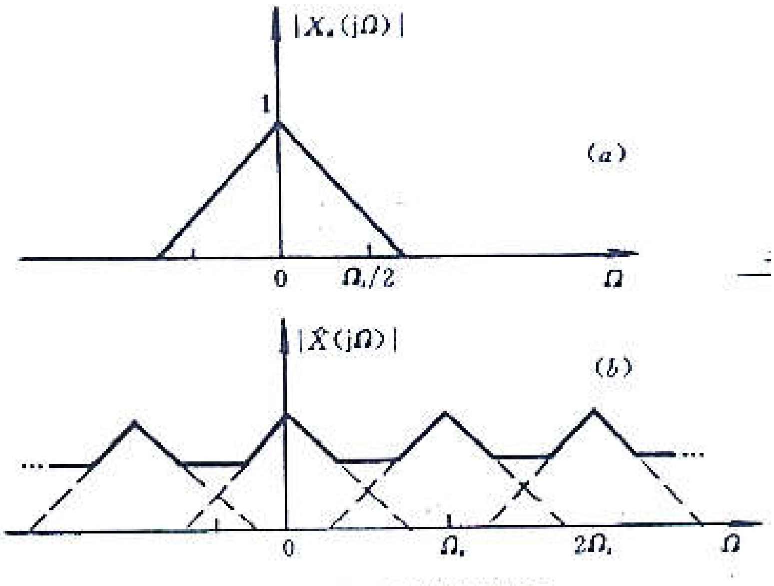


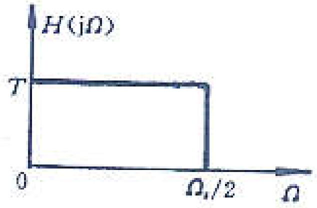
图 2—4　频谱的混叠

(a) 原连续时间信号 $x_a(t)$ 的频谱

(b) 信号取样后发生的频谱混叠现象

采样定理：$f_s \ \geq \ 2f_h$

恢复：



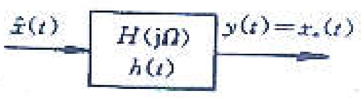


图 2—7　取样信号的恢复

理想滤波器

$$H(j\Omega)=\begin{cases} T & |\Omega|<\Omega_s/2 \\ 0 & |\Omega|\geq\Omega_s/2 \end{cases}$$

$$Y(j\Omega)=\hat{X}(j\Omega)H(j\Omega)=X_a(j\Omega) \qquad y(t)=x_a(t)$$

$$h_a(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$ 理想滤波器脉冲响应

$$=\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}}e^{j\Omega t}d\Omega=\frac{\sin\frac{\Omega_s}{2}t}{\frac{\Omega_s}{2}t}=\frac{\sin\frac{\pi}{T}t}{\frac{\pi}{T}t} \qquad \boxed{\Omega_s=\frac{2\pi}{T}}$$

理想取样信号通过低通滤波器(卷积)

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}(\tau)h_a(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(\tau-nT)h_a(t-\tau)d\tau$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-nT)h_a(t-\tau)d\tau=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)h_a(t-nT)$$

$\boxed{\text{内插函数}}$

$$h_a(t-nT)=\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$$

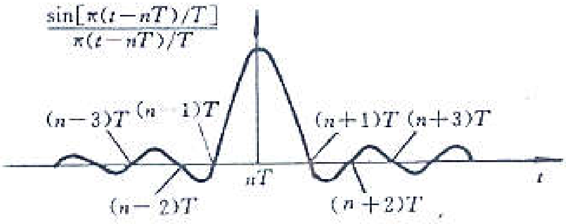
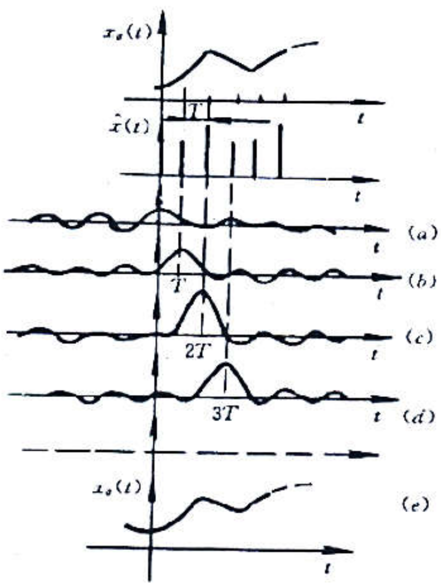


图 2—8 内插函数

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)h_a(t-nT)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$$

$$=x_a(t)$$



(a) $x_a(0T)\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-0T)}{\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-0T)}$

(b) $x_a(1T)\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-1T)}{\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-1T)}$

(c) $x_a(2T)\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-2T)}{\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-2T)}$

(d) $x_a(3T)\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-3T)}{\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-3T)}$

(e) $x_a(t)=\Sigma x_a(nT)\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-nT)}{\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-nT)}$

图 2—9 内插函数叠加成连续时间函数 $x_a(t)$

■ 利用 DFT/FFT 分析连续时间信号的频谱

$$\begin{tikzcd}
x_a(t) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & x_a(nT) \arrow[r, "\text{近似}"] \arrow[d, leftrightarrow] & x(n), 0 \le n \le N-1 \arrow[d, leftrightarrow] \\
X_a(j\Omega) & X(e^{j\Omega T}) = X(e^{j\omega}) \arrow[l] & X(k) \arrow[l, "\text{近似}"'] \arrow[ll, bend left, "\text{近似}"]
\end{tikzcd}$$

优点：便于 PC 机运算，可以广泛应用