数字信号处理

周治国

2015. 11

第五章 数字滤波器

FIR数字滤波器

概 述

IIR滤波器幅度特性好，但无法实现线性相位，需附加调相网络；

IIR滤波器需要注意稳定性问题；

由于单位抽样响应特点不同，IIR滤波器设计方法不能移植于FIR滤波器的设计；

在图像处理，数据传输和现代通信系统中多要求系统具有线性相位特性，方便起见，很多时候均使用FIR滤波；

FIR滤波可利用快速傅立叶变换；

鉴于FIR滤波器可以做到线性相位，可专门讨论线性相位FIR滤波器的设计，因为若对相位不感兴趣，可用阶数低很多的IIR滤波实现。

一、系统具有线性相位响应的条件

线性相位条件： $h(n) = \pm h(N-n-1)$

FIR频响：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

极坐标形式

$$H(e^{j\omega}) = \pm \left| H(e^{j\omega}) \right| e^{j\theta(\omega)}$$

$h(n)$是实函数时，$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|H(e^{-j\omega})\right|$，$\theta(\omega) = -\theta(-\omega)$

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega) e^{j\theta(\omega)}$$

中心奇偶对称：与圆周奇偶对称不同

二、线性相位FIR系统的时、频域特点

Case 1： $h(n)$中心偶对称，N 为奇数

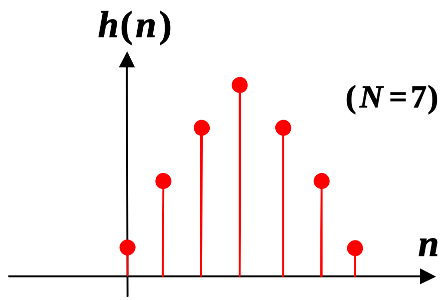
$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)\left[e^{-j\omega n}+e^{-j\omega(N-n-1)}\right]+h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}$$

$$=e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}\left\{h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)\left[e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}e^{-j\omega n}+e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}e^{-j\omega(N-n-1)}\right]\right\}$$

$$=e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}\left\{h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)\left[e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}+e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\right]\right\}$$

$$=e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\left\{h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}2h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right]\right\}$$



定义一个$(N+1)/2$点序列$a(n)$:

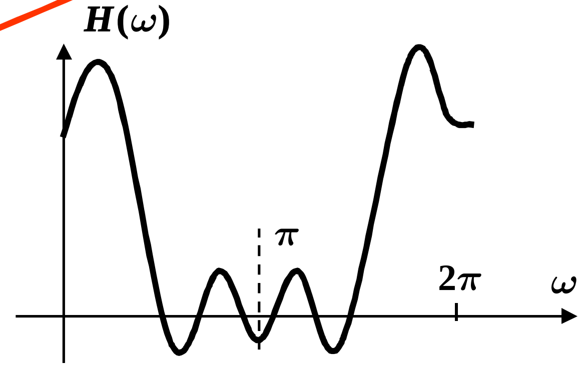
$$a(0)=h\left(\frac{N-1}{2}\right),\ a(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right),\ n=1,2,\ldots,\frac{N-1}{2}$$

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}\left[\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}a(n)\cos[\omega n]\right]$$

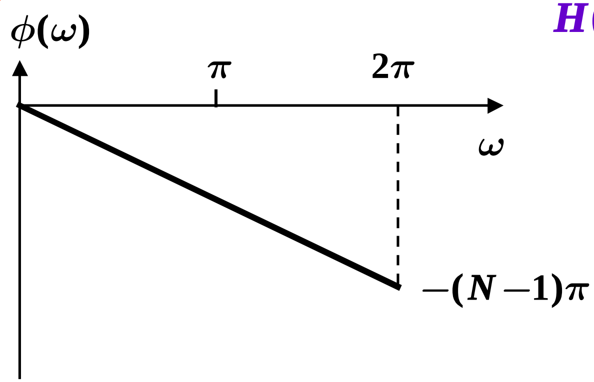
$$\Rightarrow\begin{cases}H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}a(n)\cos[\omega n]\\ \phi(\omega)=-\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega\end{cases}$$

这里$H(\omega)$并不是幅频响应，其值可正可负

note



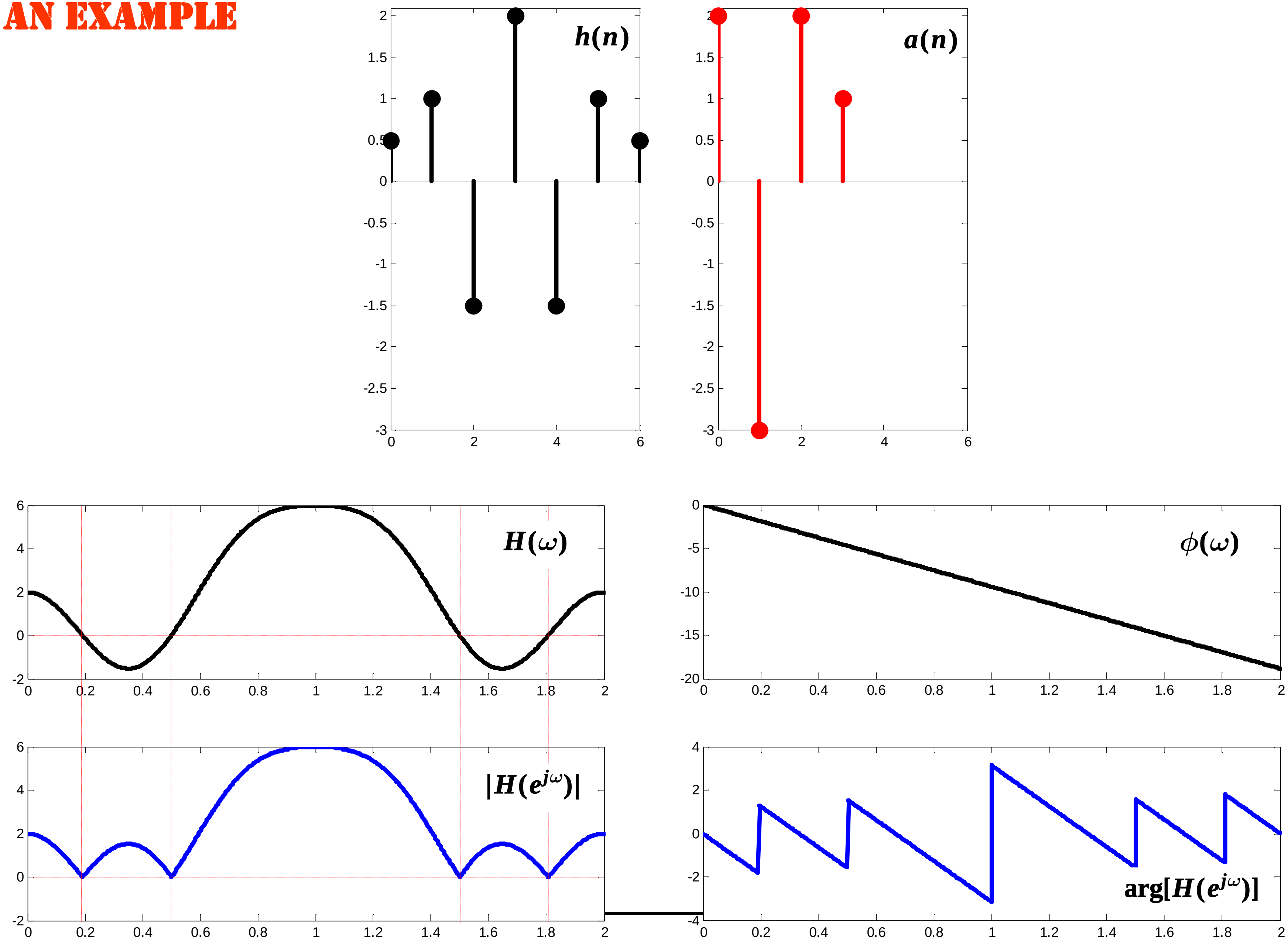
$H(\omega)=H(2\pi-\omega)$



利用上式可由$h(n)$得到滤波器频率响应

线性相位FIR滤波器

AN EXAMPLE



Case 2：$h(n)$中心偶对称，N 为偶数

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)\left[e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(N-1-n)}\right]$$

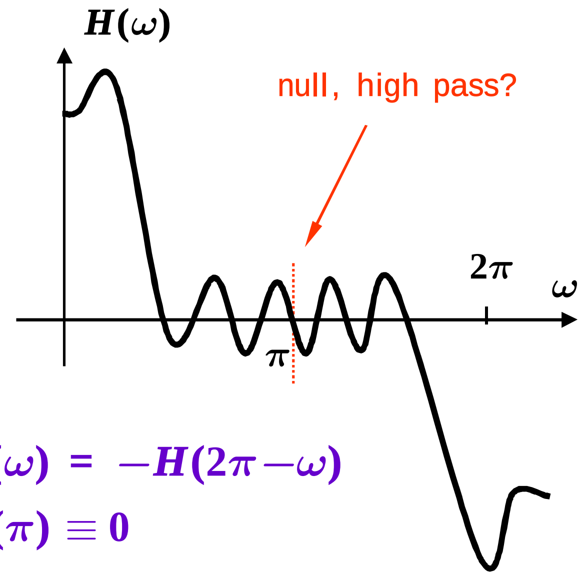
$$= e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)\left[e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} + e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\right]$$

$$= e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{N}{2}-n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

定义一个$(N/2+1)$点序列$b(n)$：

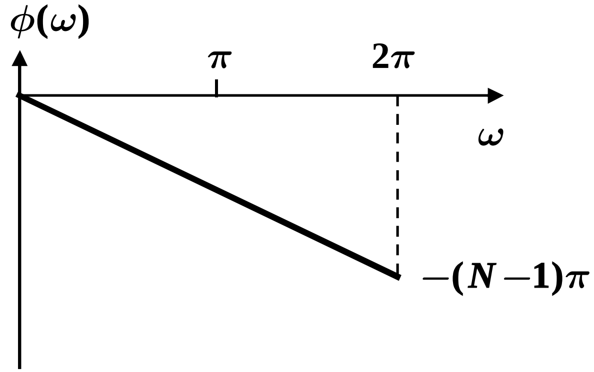
$$b(0)=0,\ b(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right),\ n=1,2,\ldots,\frac{N}{2}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{\underbrace{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}_{\phi(\omega)}} \underbrace{\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n)\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]}_{H(\omega)}$$

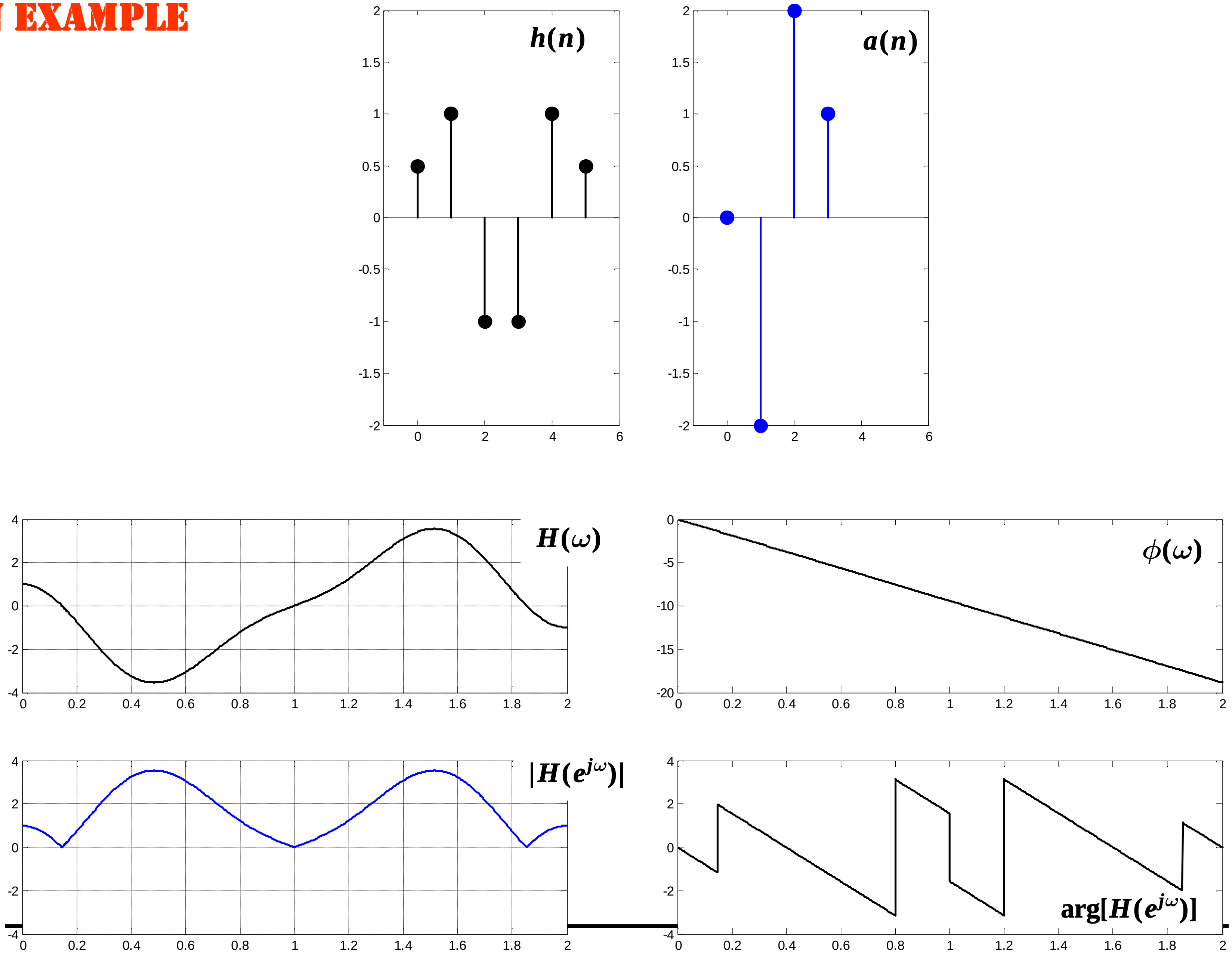


$H(\omega) = -H(2\pi-\omega)$

$H(\pi) \equiv 0$



AN EXAMPLE



Case 3： $h(n)$中心奇对称，N 为奇数（中间项恒为零）

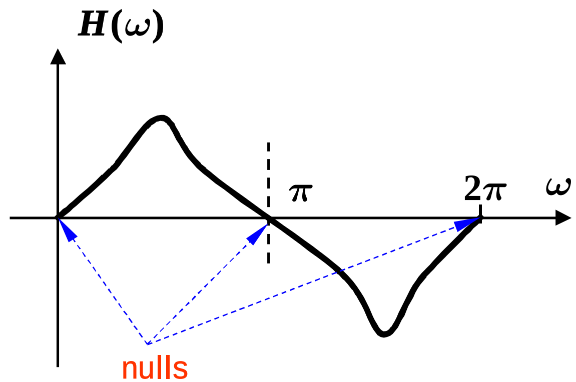
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n)\left[e^{-j\omega n} - e^{-j\omega(N-1-n)}\right]$$

$$= e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega\right)}\left\{\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n)\sin\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right]\right\}$$

定义一个$(N+1)/2$点序列$c(n)$:

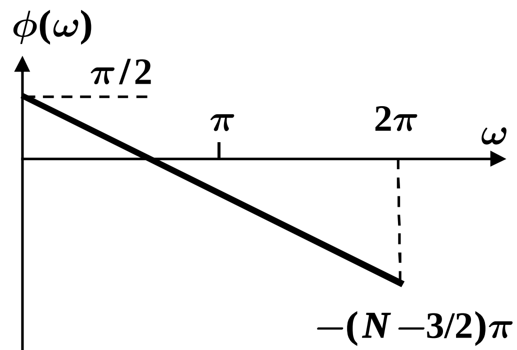
$$c(0)=0,\ c(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right),\ n=1,2,\ldots,\frac{N-1}{2}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{\underbrace{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega\right)}_{\phi(\omega)}}\underbrace{\left\{\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} c(n)\sin[\omega n]\right\}}_{H(\omega)}$$

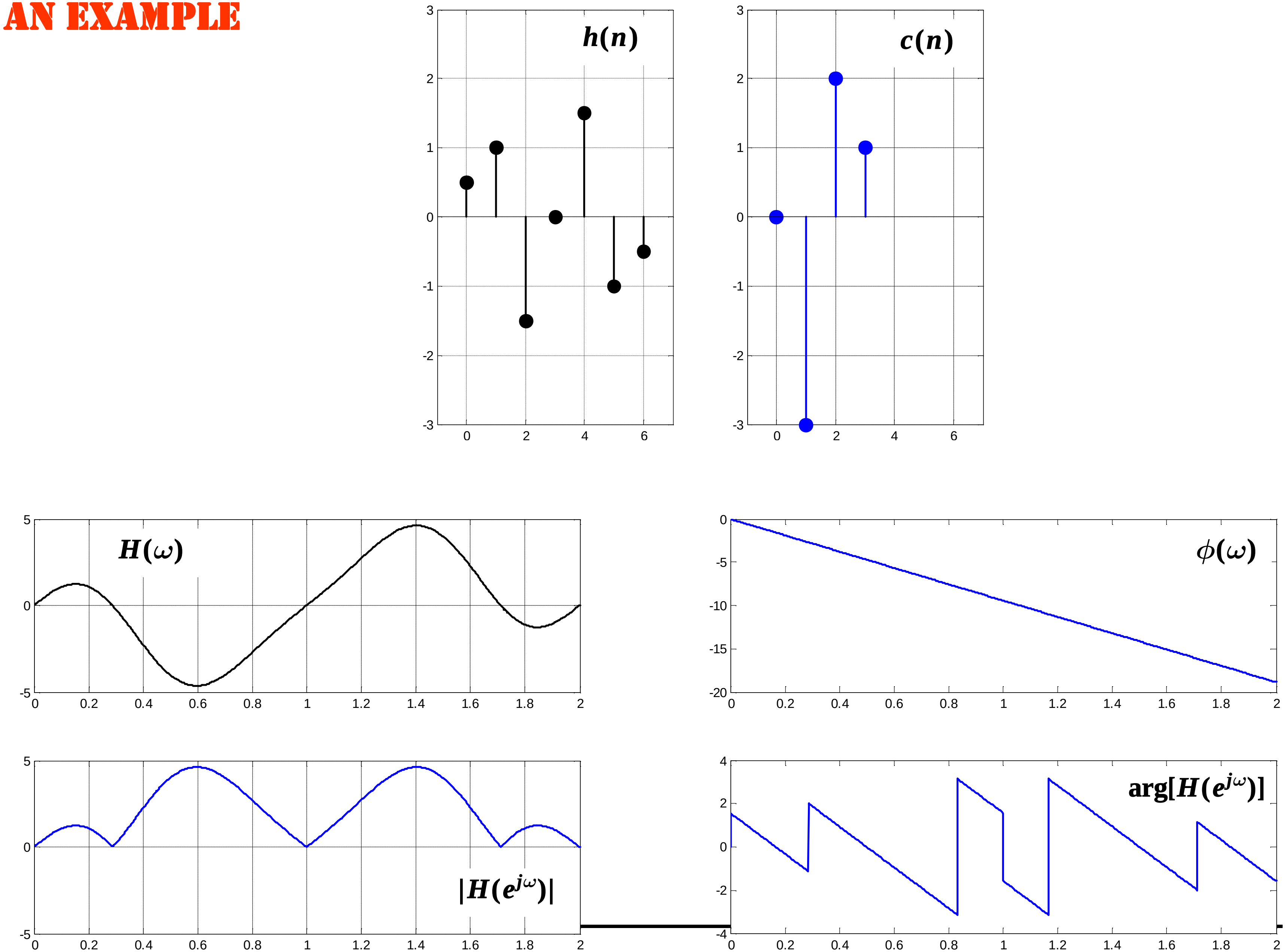


$H(\omega) = -H(2\pi-\omega)$

$H(0) = H(\pi) = H(2\pi) \equiv 0$



AN EXAMPLE



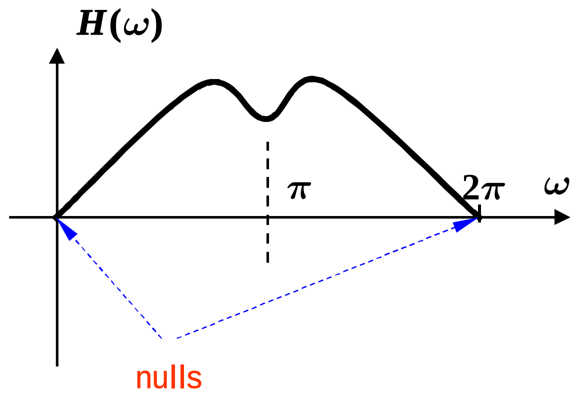
Case 4：$h(n)$中心奇对称，N 为偶数

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)\left[e^{-j\omega n}-e^{-j\omega(N-1-n)}\right]=e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)2j\sin\left[\left(\frac{N}{2}-n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

定义一个$N/2+1$点序列 $d(n)$:

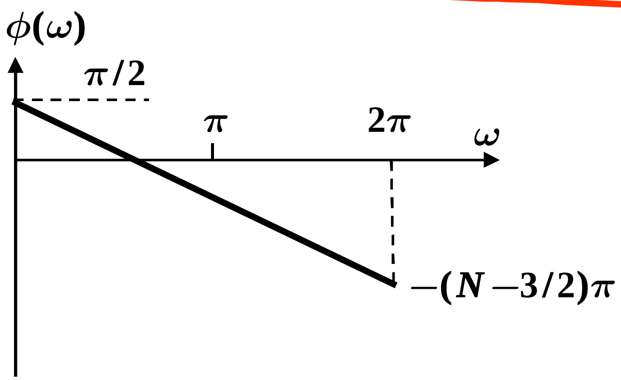
$$d(0)=0,\ d(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right),\ n=1,2,\ldots,\frac{N}{2}$$

$$H(e^{j\omega})=e^{\underbrace{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega\right)}_{\phi(\omega)}}\underbrace{\left\{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}}d(n)\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}}_{H(\omega)}$$

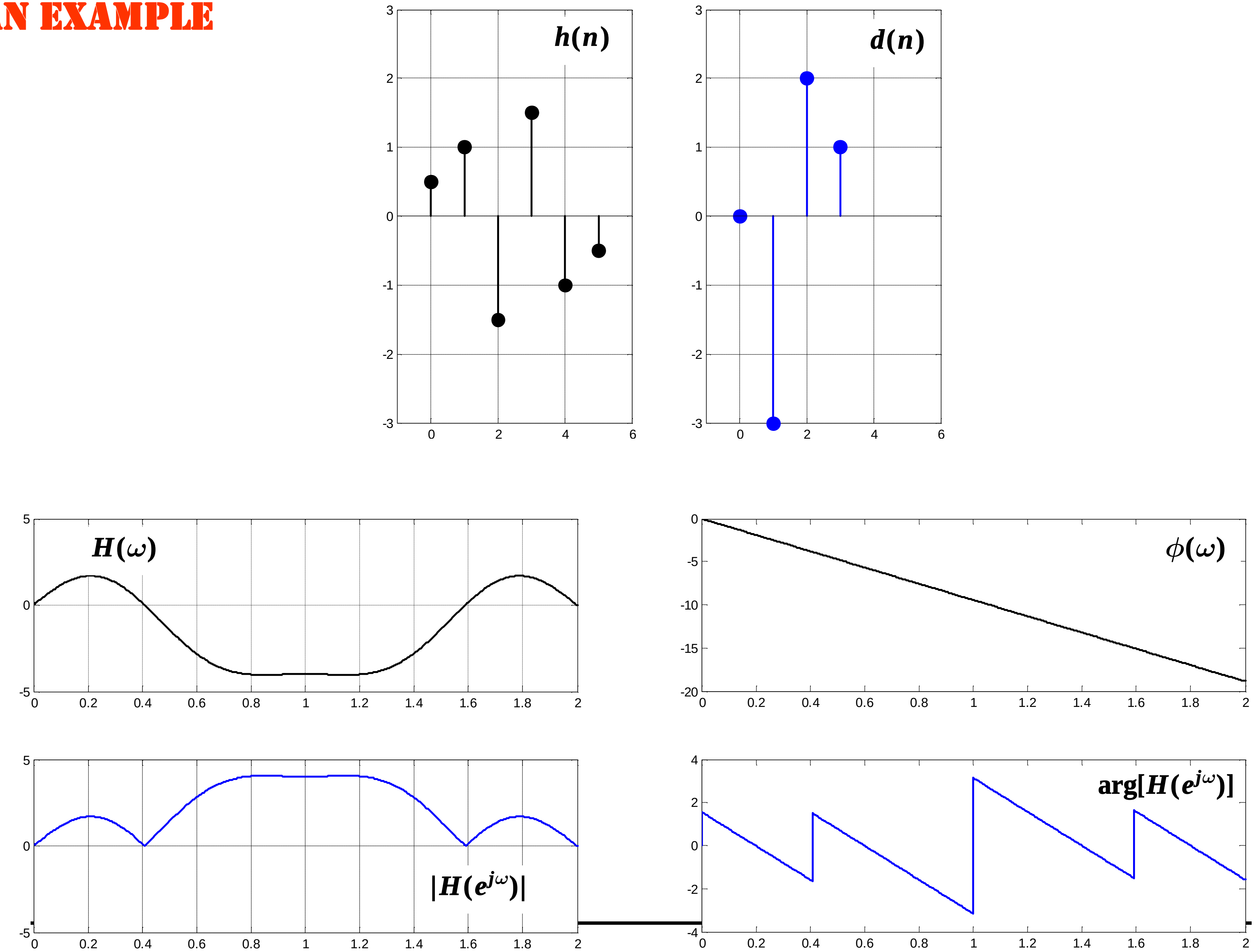


$H(\omega)=H(2\pi-\omega)$

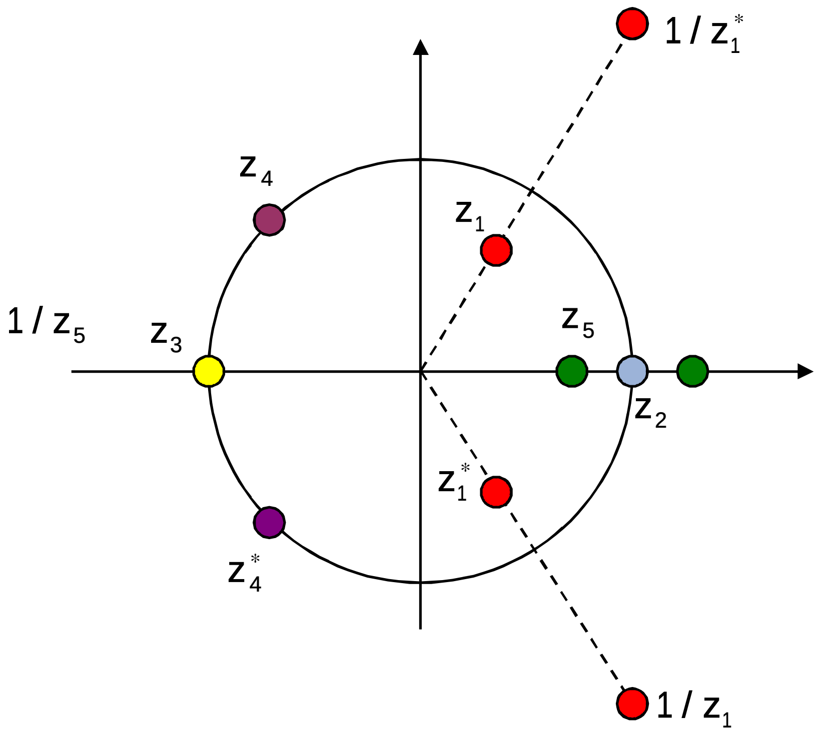
$H(0)=H(2\pi)\equiv 0$



AN EXAMPLE



线性相位系统零点特点



$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \pm h(N-1-n) z^{-n} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \pm h(m) z^{-(N-1-m)} \\
&= \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{m} \\
&= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})
\end{aligned}
$$

A summary:

线性相位 FIR 数字滤波器特点

① 时域：

$$h(n) = \pm h(N-n-1)$$

② 频域：

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\left(\frac{L}{2}\pi - \frac{N-1}{2}\omega\right)}$$

$$H(z) = (-1)^L z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

— $H(\omega)$为实函数

— $h(n)$偶对称：$L = 0$

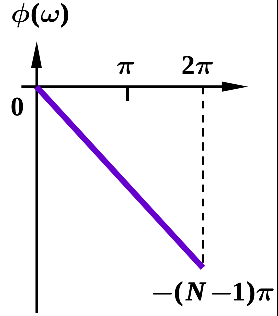
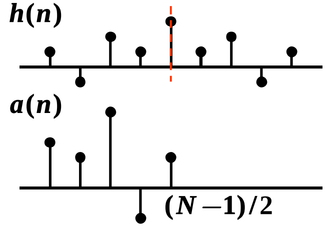
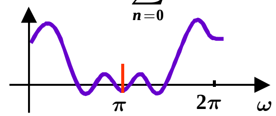
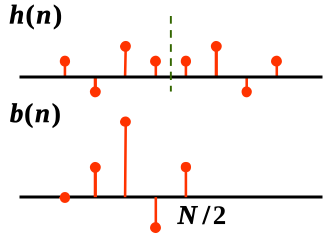
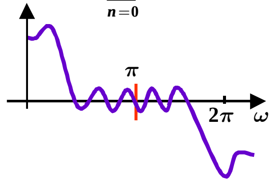
— $h(n)$奇对称：$L = 1$

③ 零点：

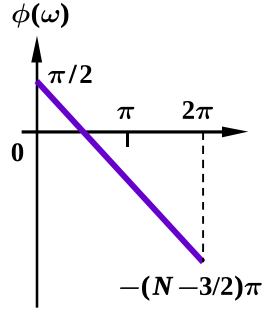
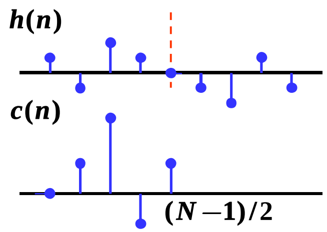
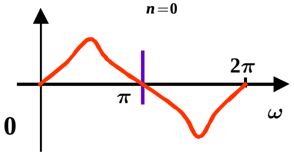
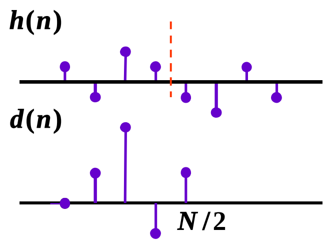
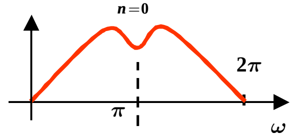
成倒易对出现

线性相位FIR滤波器的四种情况

$h(n) = h(N-n-1)$

1)	$\phi(\omega) = -\omega(N-1)/2$ 		奇数N $H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n)\cos(\omega n)$  $a(0) = h[(N-1)/2]$ $a(n) = 2h[(N-1)/2-n], n = 1 \sim (N-1)/2$
2)			偶数N $H(\omega) = \sum_{n=0}^{N/2} b(n)\cos[\omega(n-1/2)]$  $b(0) = 0$ $b(n) = 2h[N/2-n], n = 1 \sim N/2$

$h(n) = -h(N-n-1)$

3)	$\phi(\omega) = \pi/2 - \omega(N-1)/2$ 		奇数N $H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} c(n)\sin(\omega n)$  $c(0) = 0$ $c(n) = 2h[(N-1)/2-n], n = 1 \sim (N-1)/2$
4)			偶数N $H(\omega) = \sum_{n=0}^{N/2} d(n)\sin[\omega(n-1/2)]$  $d(0) = 0$ $d(n) = 2h[N/2-n], n = 1 \sim N/2$

How to derive $H(e^{j\omega})$ from $h(n)$?