

数字信号处理

周治国

2015. 11



第五章 数字滤波器

IIR数字滤波器

双线性变换法



IIR数字滤波器设计



一、从模拟滤波器设计数字滤波器

1、从模拟低通滤波器设计数字低通滤波器

- (1) 脉冲/阶跃响应不变法
- ☒ 双线性变换法

2、IIR数字低通滤波器的频率变换（高通、带通、带阻数字滤波器的设计）

- (1) 直接由模拟原型到各种类型数字滤波器的转换
- (2) 从数字低通滤波器到各种类型数字滤波器的转换

二、直接设计IIR数字滤波器

1、IIR数字低通滤波器的频域直接设计方法

- (1) 零、极点位置累试法（点阻滤波器）
- (2) 幅度平方函数法

2、IIR数字低通滤波器的时域直接设计方法

- (1) 帕德逼近法
- (2) 波形形成滤波器设计

三、IIR数字滤波器的优化设计方法

- 1、最小均方误差方法
- 2、最小p误差方法
- 3、最小平方逆设计法
- 4、线性规划设计方法

双线性变换方法 (Bilinear Transformation)

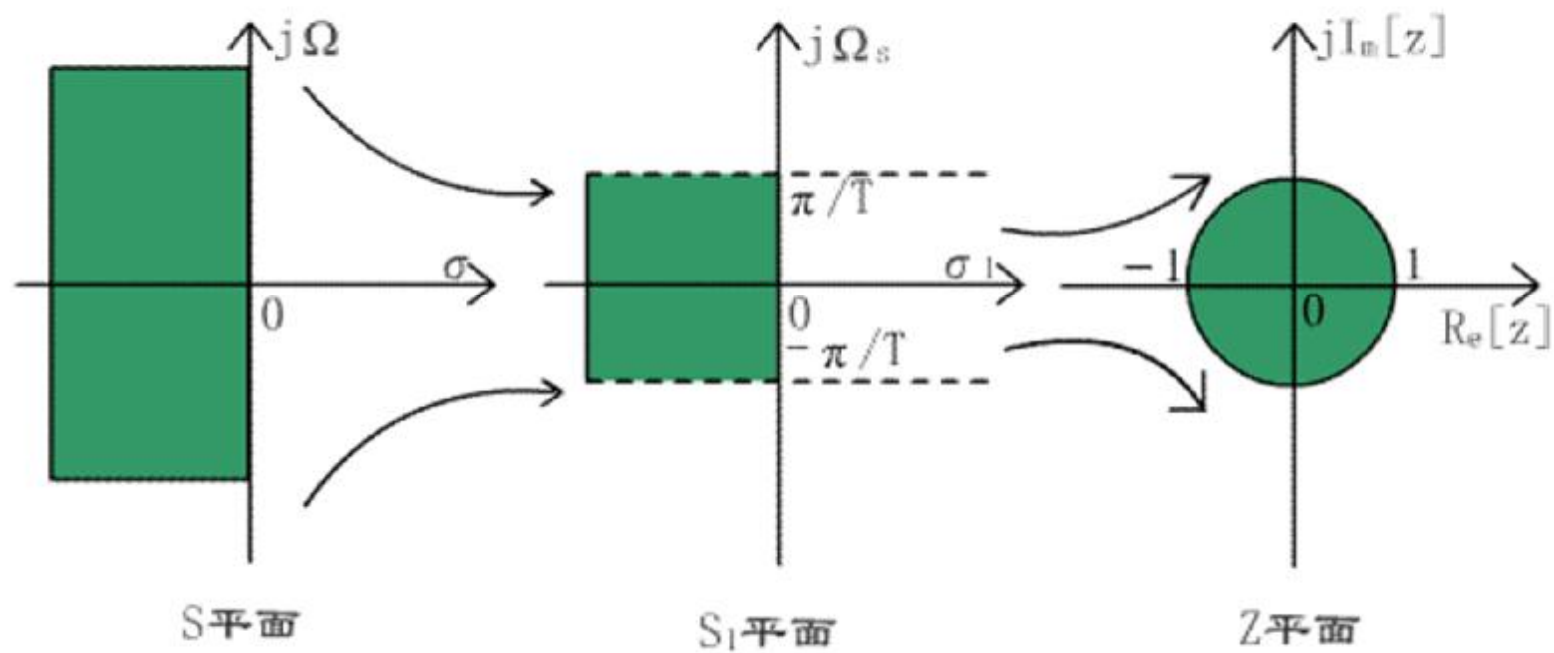
原理推导

脉冲响应不变法的主要缺点是频谱交叠产生的混淆，这是从S平面到Z平面的标准变换 $z = e^{sT}$ 的多值对应关系导致的，为了克服这一缺点，设想变换分为两步：

第一步：将整个S平面压缩到S1平面的一条横带里；

第二步：通过标准变换关系将此横带变换到整个Z平面上去。

由此建立S平面与Z平面一一对应的单值关系，消除多值性，也就消除了混淆现象。



双线性变换的映射关系

双线性变换方法 (Bilinear Transformation)

映射关系：

频域直接映射

$$H_a(s) \rightarrow H(z)$$

$$(1) \quad z = \frac{2/T + s}{2/T - s}; \quad s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$(2) \quad |z| = \sqrt{\frac{(2/T + \sigma)^2 + \Omega^2}{(2/T - \sigma)^2 + \Omega^2}}$$

$$(3) \quad s = j\Omega, z = e^{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 2 \tan^{-1} \left(\frac{\Omega T}{2} \right) \\ \Omega = \frac{2}{T} \tan \left(\frac{\omega}{2} \right) \end{cases}$$

什么是双线性变换？

s与z之间有简单的代数关系

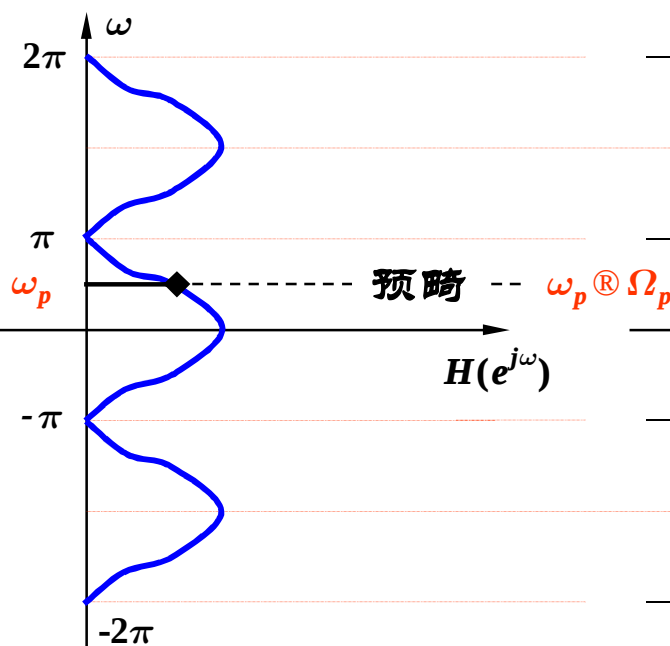
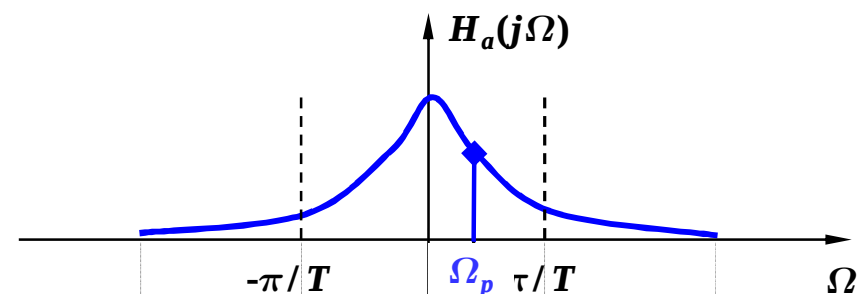
双线性变换方法 (Bilinear Transformation)

频域直接映射

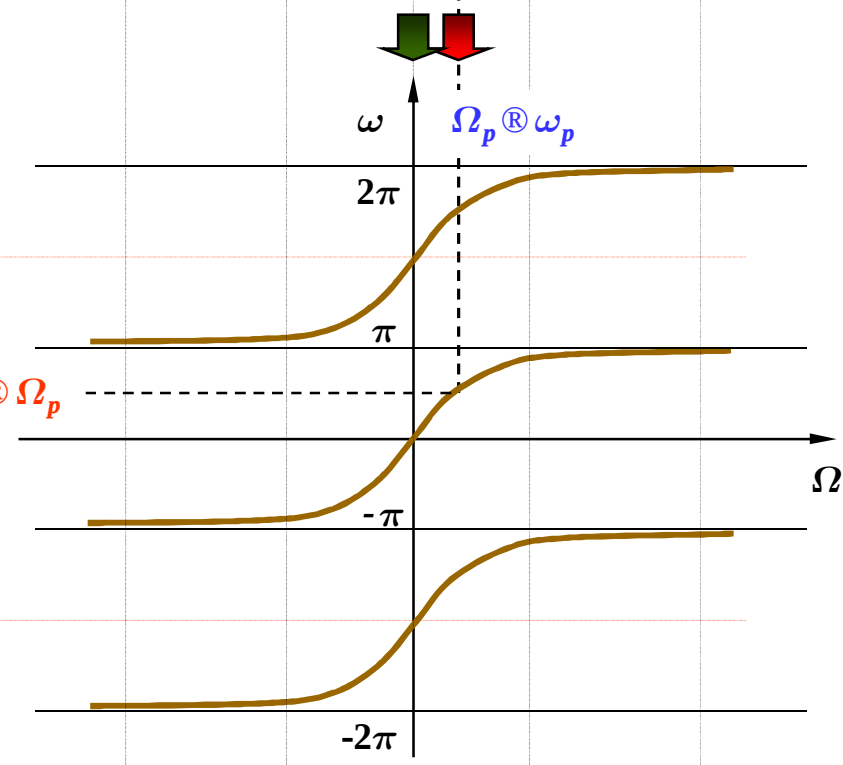
$$H_a(s) \rightarrow H(z)$$

$$(1) \quad z = \frac{2/T + s}{2/T - s}; \quad s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$(2) \quad s = j\Omega, z = e^{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 2 \tan^{-1} \left(\frac{\Omega T}{2} \right) \\ \Omega = \frac{2}{T} \tan \left(\frac{\omega}{2} \right) \end{cases}$$



与脉冲响应
不变变换法
z域s域映射
关系比较
(混叠失真)



双线性变换方法 (Bilinear Transformation)

优缺点

优点：消除了混叠误差

缺点：频率 ω 与 Ω 之间非线性

为什么要预畸呢？

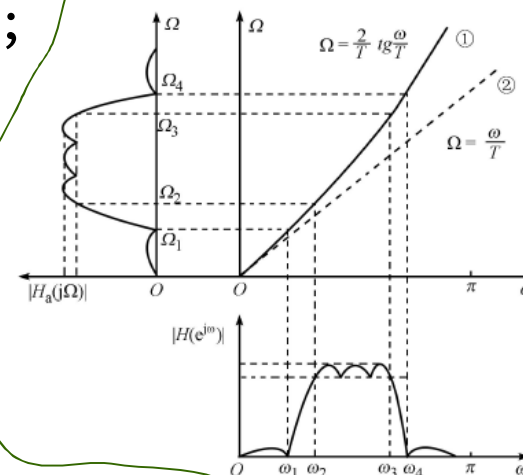
- 若数字带通滤波器的四个截止频率为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$;
- 按线性变换所对应的四个模拟截止频率分别为:

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1}{T}, \Omega_2 = \frac{\omega_2}{T}, \Omega_3 = \frac{\omega_3}{T}, \Omega_4 = \frac{\omega_4}{T}$$

- 再进行模拟带通滤波器的系统函数的求解;
- 求出后, 如用双线性变换将模拟滤波器变换成为数字滤波器

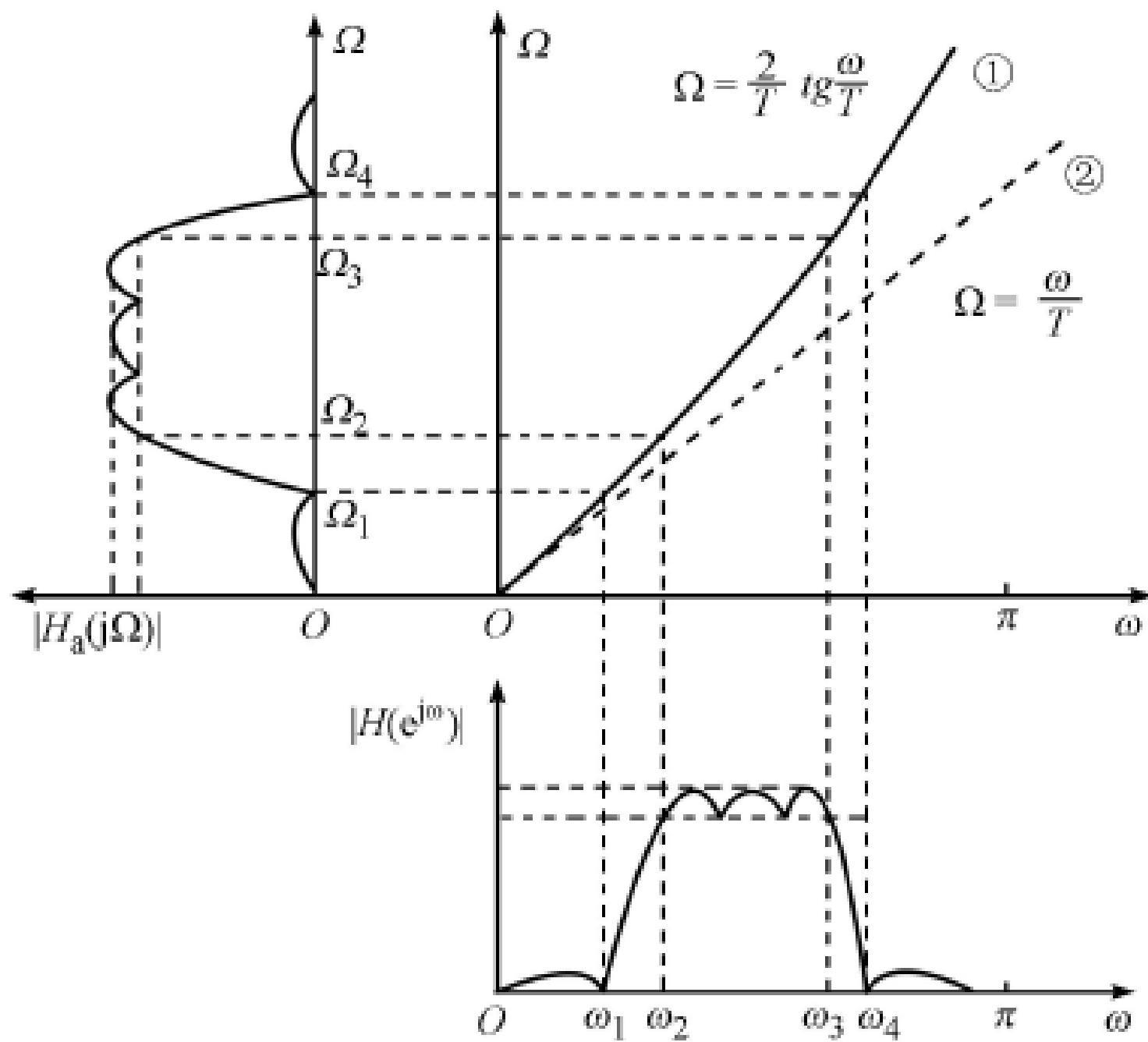
$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \omega = 2 \tan^{-1} \left(\frac{\Omega T}{2} \right)$$

- 显然就不等于原来给出的数字滤波器的频率要求, 即现在带通的四个截止频率不等于原来的 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, 需对第二步进行预畸。即模拟滤波器按预畸后的 $\Omega_k = (2/T) \tan(\omega_k / 2)$ 进行设计。



由数字到模拟，再由模拟到数字

Important !!!



双线性变换方法（模拟滤波器数字化）

频域直接映射

$$\mathbf{z} = \frac{2/T + s}{2/T - s}; \quad s = \frac{2}{T} \frac{1 - \mathbf{z}^{-1}}{1 + \mathbf{z}^{-1}}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - \mathbf{z}^{-1}}{1 + \mathbf{z}^{-1}}} = H_a\left(\frac{2}{T} \frac{1 - \mathbf{z}^{-1}}{1 + \mathbf{z}^{-1}}\right)$$

$$H(e^{j\omega}) = H_a(j\Omega) \Big|_{\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)} = H_a\left(\frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)$$

s与z之间有简单的代数关系

IIR滤波器设计

提示:

(1)所有小数均计算到小数点后两位

(2)假设取样间隔 $T = 1$

(3)双线性变换的频率变换关系为:

$$\Omega = 2/T \tan(\omega/2)$$

(4)模拟巴特沃斯低通滤波器 $H_a(s)$ 的极点为:

$$s_k = \Omega_c e^{jp[1/2+(2k-1)/(2N)]}, k = 1, 2, \dots, N$$

(4)模拟巴特沃斯低通滤波器平方函数为:

$$A^2(\Omega) = 1/[1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}]$$

IIR滤波器设计1--往年真题

如果所要设计的数字低通滤波器满足下列条件：

(a) 在 $\omega \leq p/8$ 的通带范围内幅度变化不大于 3dB ,

(b) 在 $p/2 \leq \omega \leq p$ 的阻带范围内幅度衰减不小于 20dB ,

试用双线性变换法，设计相应的数字巴特沃斯低通滤波器，

(1) 确定滤波器的阶数 N

(2) 确定滤波器的系统函数 $H(z)$

(3) 确定滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$

(4) 给出滤波器的任意一种结构实现形式



解：

(1) 预畸

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \Omega_c = 2 \operatorname{tg} \frac{p}{16} = 0.4, \Omega_s = 2 \operatorname{tg} \frac{p}{4} = 2$$

(2) 由已知条件列出对模拟滤波器的衰减要求

$$A^2(\Omega) = |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^{2N}}$$
$$\Rightarrow 20 \lg |H_a(j\Omega_c)| = -10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^{2N} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20 \lg |H_a(j\Omega_c)| \geq -3 \text{ dB} \\ 20 \lg |H_a(j\Omega_s)| \leq -20 \text{ dB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega_c}{\Omega_c} \right)^{2N} \right] \geq -3 \text{ dB} \\ -10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)^{2N} \right] \leq -20 \text{ dB} \end{cases}$$

由题干3dB, 可直接得到 $\Omega_c = 0.40$

解出： $N = 1.42$, 取 $N = 2$

(3) 直接由表5-1

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\Omega_c s + \Omega_c^2} \text{ 得到}$$

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \text{ 代入 } H_a(s)$$

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{0.16(1+z^{-1})^2}{5.28-7.26z^{-1}+3.02z^{-2}}$$

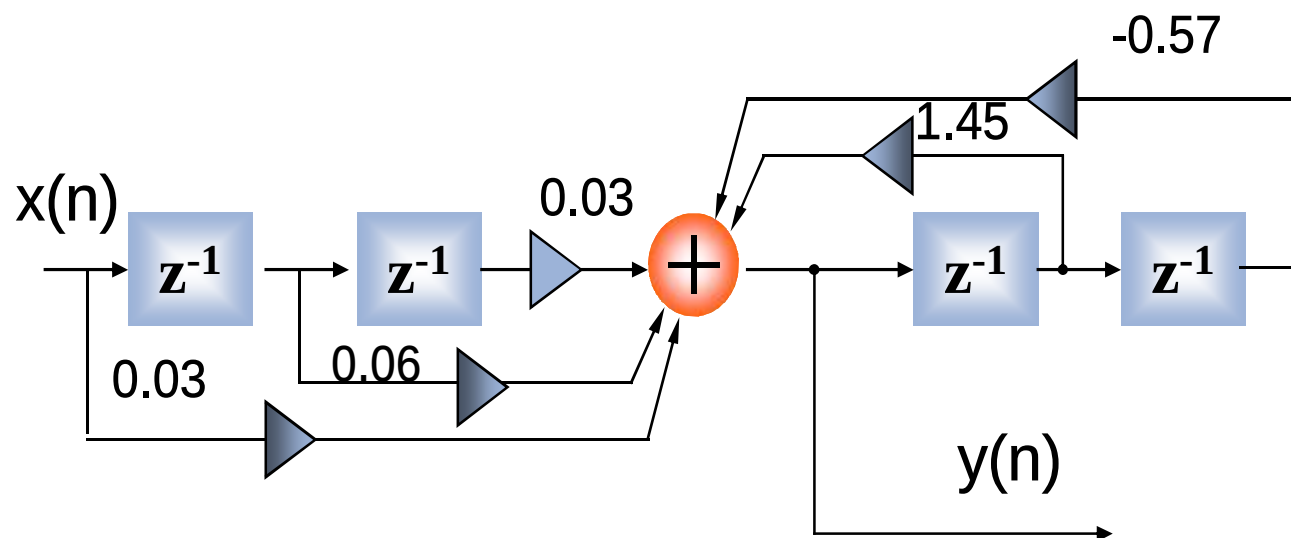
$$= \frac{0.03+0.06z^{-1}+0.03z^{-2}}{1-1.45z^{-1}+0.57z^{-2}}$$

(4) 频率响应

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

(5) 滤波器结构

直接I, II



IIR滤波器设计2—习题集P91

用双线性变换法设计相应的数字巴特沃斯低通滤波器，

指标： $0 \leq f \leq 2.5\text{Hz}$ 衰减小于 3dB

$f \geq 50\text{Hz}$ 衰减大于或等于 40dB

抽样频率 $f_s = 200\text{Hz}$ 。

- (1) 确定滤波器的阶数 N
- (2) 确定滤波器的系统函数 $H(z)$
- (3) 确定滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$
- (4) 给出滤波器的任意一种结构实现形式



由模拟指标到数字指标，由数字指标预畸到模拟指标，设计模拟滤波器，再由模拟滤波器到数字滤波器

解：

(1)把模拟角频率转化为数字角频率

$$T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{200},$$

$$\Rightarrow \Omega_c' = 2p f_c = 5p \quad w_c = \Omega_c' T = \frac{p}{40},$$

$$\Rightarrow \Omega_s' = 2p f_s = 100p \quad w_s = \Omega_s' T = \frac{p}{2},$$

(2) 预畸

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{w}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \Omega_c = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{w_c}{2} \right) = 400 \operatorname{tg} \frac{p}{80}$$

$$= 15.7 = 5p$$

$$\Rightarrow \Omega_s = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{w_s}{2} \right) = 400 \operatorname{tg} \frac{p}{4}$$

$$= 400 = 127.39p$$

(3)列出对模拟滤波器的衰减要求

$$A^2(\Omega) = |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^{2N}}$$

$$\Rightarrow 20 \lg |H_a(j\Omega_c)| = -10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^{2N} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20 \lg |H_a(j\Omega_c)| \geq -3dB \\ 20 \lg |H_a(j\Omega_s)| \leq -40dB \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega_c}{\Omega_c} \right)^{2N} \right] \geq -3dB \\ -10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)^{2N} \right] \leq -40dB \end{cases}$$

由题干3dB, 可直接得到 $\Omega_c = 15.7$

取等号解出: $N = 1.42$, 取 $N = 2$

(4)直接由表5-1

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\Omega_c s + \Omega_c^2} \text{ 得到}$$

$$\Rightarrow H_a(s) = \frac{246.5}{s^2 + 22.2s + 246.5}$$

$$\text{将 } s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \text{ 代入 } H_a(s)$$

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{686.11} \bullet \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-1.89z^{-1}+0.90z^{-2}}$$

(5)频率响应

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

(6)滤波器结构

直接I, II

