数字信号处理

周治国

2015.11

第五章 数字滤波器

IIR数字滤波器

脉冲响应不变变换法

IIR数字滤波器设计

- **一、从模拟滤波器设计数字滤波器**
  - **1、从模拟低通滤波器设计数字低通滤波器**
    - （1）脉冲/阶跃响应不变法
    - （2）双线性变换法
  - 2、IIR数字低通滤波器的频率变换（高通、带通、带阻数字滤波器的设计
    - （1）直接由模拟原型到各种类型数字滤波器的转换
    - （2）从数字低通滤波器到各种类型数字滤波器的转换
- 二、直接设计IIR数字滤波器
  - 1、IIR数字低通滤波器的频域直接设计方法
    - （1）零、极点位置累试法（点阻滤波器）
    - （2）幅度平方函数法
  - 2、IIR数字低通滤波器的时域直接设计方法
    - （1）帕德逼近法
    - （2）波形形成滤波器设计
- 三、IIR数字滤波器的优化设计方法
  - 1、最小均方误差方法
  - 2、最小p误差方法
  - 3、最小平方逆设计法
  - 4、线性规划设计方法

模拟原型滤波器数字化设计方法

原理（Principle）

首先按一定指标设计出满足要求的模拟原型滤波器，再将其通过某种方式数字化

转换方法（Conversion methods）

— 将微分方程转换为差分方程

— **脉冲响应不变变换法**

— **双线性变换法**

— 匹配Z变换

要求（Requirement）

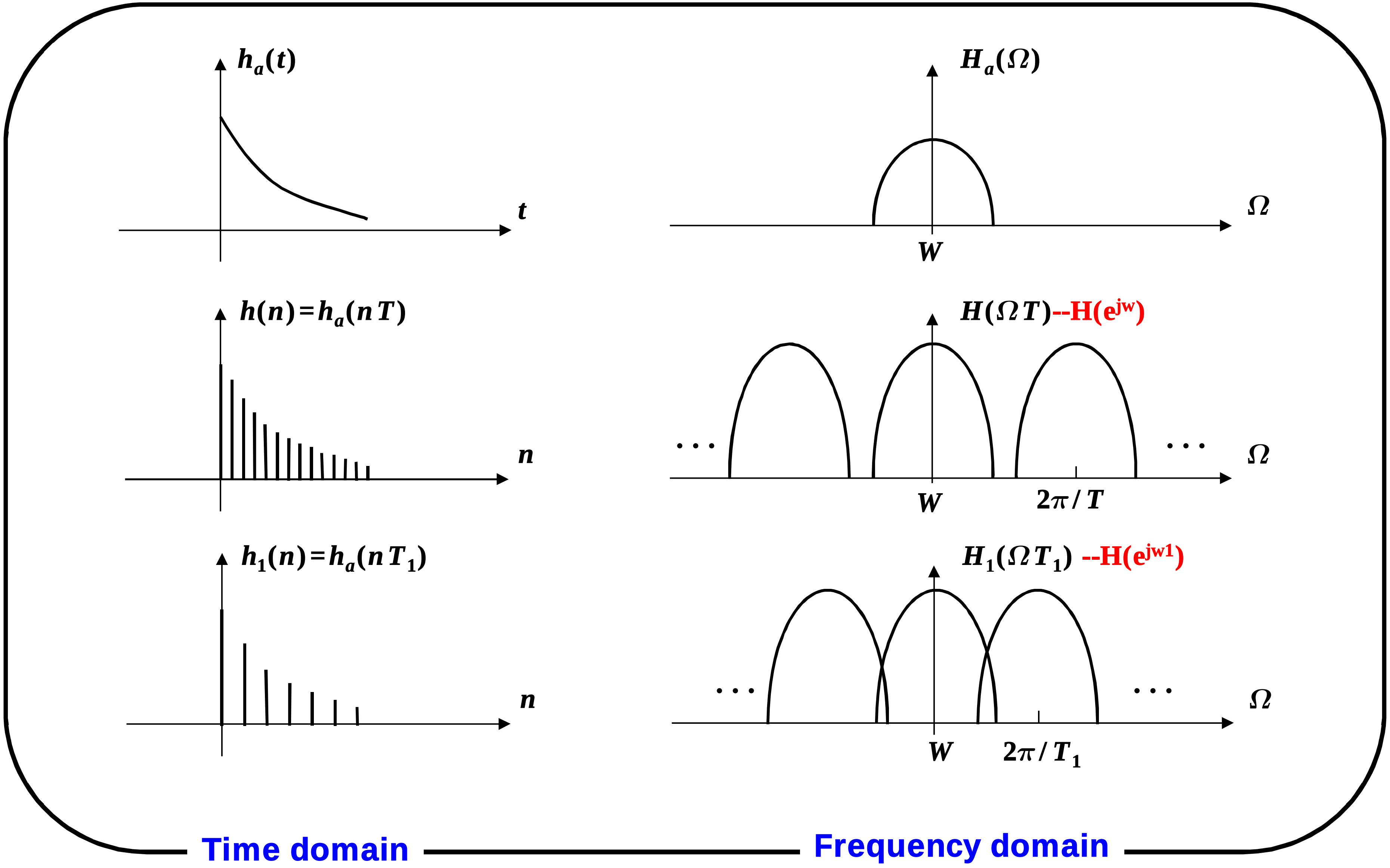
① s-平面的左半平面应映射至z-平面的单位圆内，即系统稳定性要在转换中能够保持；

② 保形要求（频率选择能力）

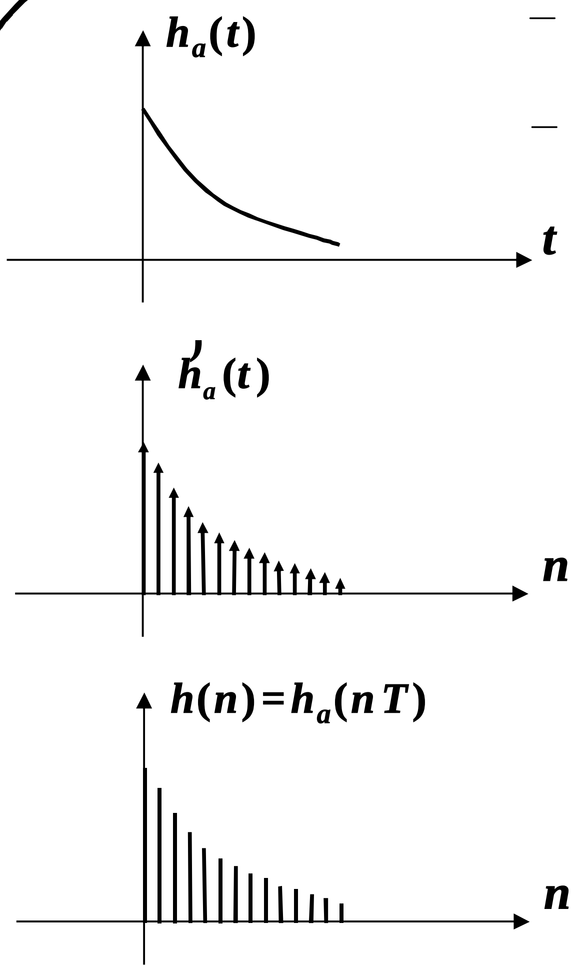
IIR数字滤波器设计

- **一、从模拟滤波器设计数字滤波器**
  - **1、从模拟低通滤波器设计数字低通滤波器**
    - **脉冲/阶跃响应不变法**
    - （2）双线性变换法
  - 2、IIR数字低通滤波器的频率变换（高通、带通、带阻数字滤波器的设计
    - （1）直接由模拟原型到各种类型数字滤波器的转换
    - （2）从数字低通滤波器到各种类型数字滤波器的转换
- 二、直接设计IIR数字滤波器
  - 1、IIR数字低通滤波器的频域直接设计方法
    - （1）零、极点位置累试法（点阻滤波器）
    - （2）幅度平方函数法
  - 2、IIR数字低通滤波器的时域直接设计方法
    - （1）帕德逼近法
    - （2）波形形成滤波器设计
- 三、IIR数字滤波器的优化设计方法
  - 1、最小均方误差方法
  - 2、最小p误差方法
  - 3、最小平方逆设计法
  - 4、线性规划设计方法

脉冲响应不变法--变换原理



脉冲响应不变法--变换原理



- $h_a(t) \rightarrow \hat{h}_a(t) \rightarrow h(n) \Rightarrow H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$
- $H_a(s) \rightarrow \hat{H}_a(s) \stackrel{?}{\Rightarrow} H(z)$

$$\hat{H}_a(s)=L\left[\hat{h}_a(t)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(nT) e^{-sTn}$$

$$H(z)=\left.\hat{H}_a(s)\right|_{s=\frac{1}{T}\ln z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} \neq \left.H_a(s)\right|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$$

$$\hat{H}_a(s)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a\left(s-j\frac{2\pi}{T}m\right) \neq H_a(s)$$

$$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega}{T}-j\frac{2\pi}{T}m\right) \neq H_a\left(\Omega=\frac{\omega}{T}\right)$$

$$\Omega=\frac{\omega}{T}$$

$$\boxed{H(e^{j\omega})=\frac{1}{T}H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right)=\frac{1}{T}H_a(j\Omega) \quad |\omega| \leq \pi}$$

结论： 由$H_a(s)$和$H(z)$之间不是单值映射

频率变换坐标是线性的

脉冲响应不变法—模拟滤波器数字化

$$H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i}$$

并联，部分分式

$$\Rightarrow h_a(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{s_i t}u(t)\Rightarrow h(n)=h_a(nT)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{s_i Tn}u(nT)$$

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}A_i(e^{s_iT})^n z^{-n}u(n)=\sum_{i=1}^{N}A_i\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{s_iT}z^{-1}\right)^n$$

$$=\sum_{i=1}^{N}A_i\lim_{N\to\infty}\frac{1-(e^{s_iT}z^{-1})^N}{1-e^{s_iT}z^{-1}}$$

$$\overset{|z|>|e^{s_iT}|}{=}\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}$$

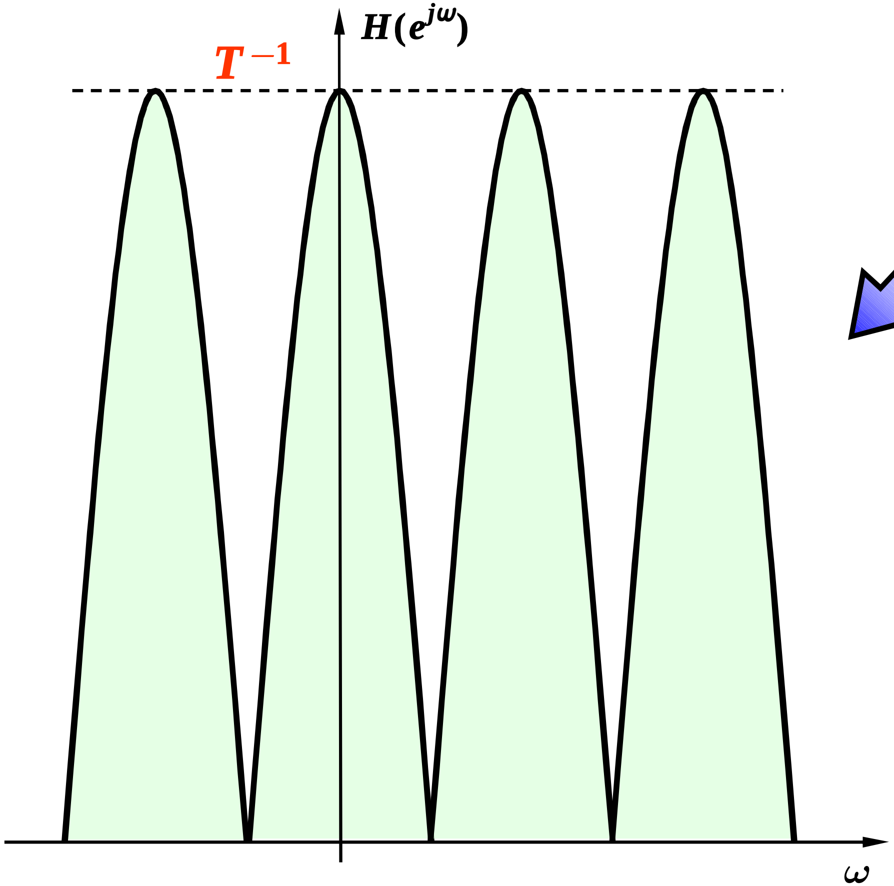
此处把课本（5-23）和（5-43）（5-46）统一起来

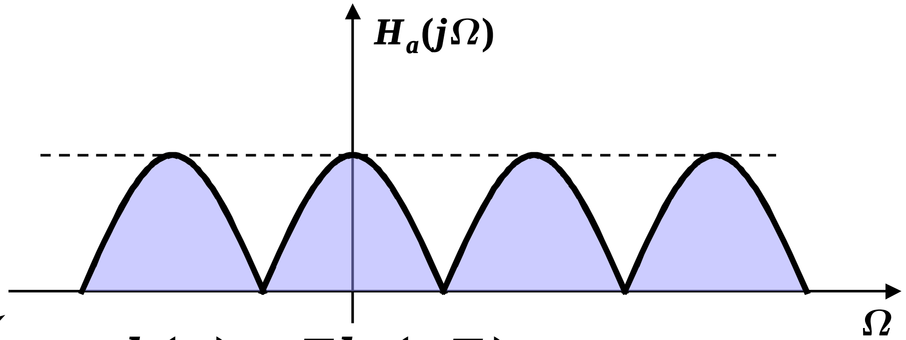
$$\frac{A_i}{s-s_i}\Leftrightarrow\frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}=\frac{A_i z}{z-e^{s_iT}}$$

优缺点

1、增益过高（T^{-1}）

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right) = \frac{1}{T} H_a(j\Omega) \quad |\omega| \le \pi}$$





$$h(n) = T h_a(nT)$$

$$\Downarrow$$

$$H(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{T A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

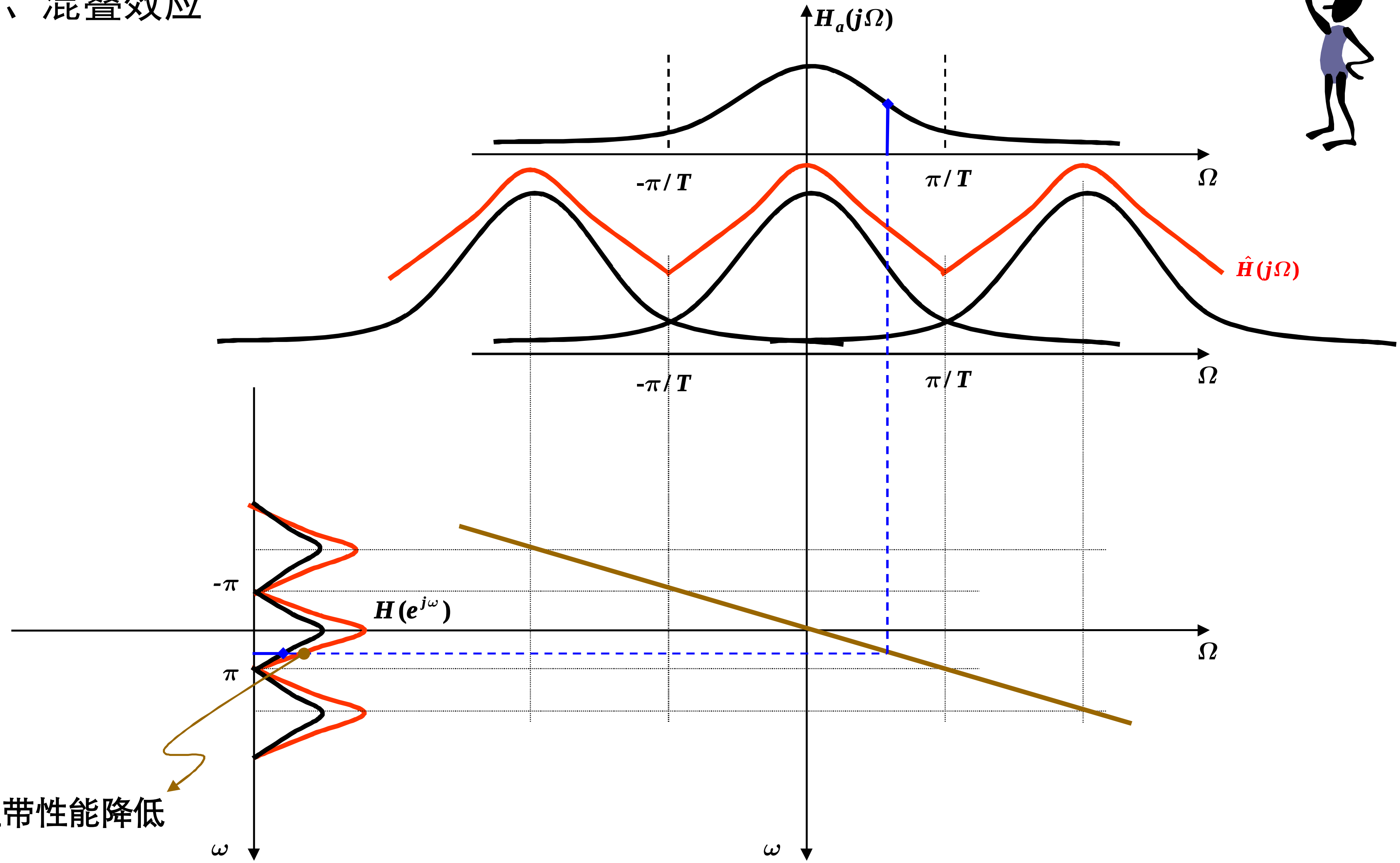
$$\Downarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T} m\right)$$

$$\Downarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right), |\omega| \le \pi$$

2、混叠效应



$H_a(j\Omega)$
$-\pi/T$
π/T
Ω
$\hat{H}(j\Omega)$
$-\pi/T$
π/T
Ω
$-\pi$
$H(e^{j\omega})$
Ω
π
阻带性能降低
ω
ω

IIR滤波器设计1—课本P194

如果所要设计的数字低通滤波器满足下列条件：

(a) 在$w \le 0.2p$的通带范围内幅度变化不大于1dB,

(b) 在0. 3$p \le w \le p$的阻带范围内幅度衰减不小于15dB,

试用脉冲响应不变变换法，设计相应的数字巴特沃斯低通滤波器，

(1) 确定滤波器的阶数N

(2) 确定滤波器的系统函数$H(z)$

(3)确定滤波器的频率响应$H(e^{jw})$

(4)给出滤波器的任意一种结构实现形式 √

解：(1)由已知条件列出对模拟滤波器的衰减要求

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\Omega_p)\right| \ge -1dB \\ 20\lg\left|H_a(j\Omega_s)\right| \le -15dB \end{cases}$$

$$H(e^{jw}) = H_a(j\frac{w}{T}) = H_a(j\Omega), |w| \le p$$

$w = \Omega T$，$T = 1$

$$\Rightarrow \Omega_p = \frac{w_p}{T} = 0.2p\,,\ \Omega_s = \frac{w_s}{T} = 0.3p\,,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j0.2p)\right| \ge -1dB \\ 20\lg\left|H_a(j0.3p)\right| \le -15dB \end{cases}$$

$$A^2(\Omega) = \left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\Rightarrow 20\lg\left|H_a(j\Omega)\right| = -10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10\lg\left[1+\left(\dfrac{0.2p}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \ge -1dB \\ -10\lg\left[1+\left(\dfrac{0.3p}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \le -15dB \end{cases}$$

$$\text{取等号}\begin{cases} 1+\left(\dfrac{0.2p}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1}\,(a) \\ 1+\left(\dfrac{0.3p}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{1.5}\,(b) \end{cases}$$

解出：$N = 5.89$，$\Omega_c = 0.7047$取$N = 6$

代入$(a), \Omega_c = 0.7032$

代入$(b), \Omega_c = 0.7080$

(2)由巴特沃斯滤波器极点公式得到

$$s_k=\Omega_c e^{jp[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}]},k=1,2,\mathbf{L},N$$

$$s_{1,2}=-0.18\pm j0.70;\qquad s_{3,4}=-0.50\pm j0.50;\qquad s_{5,6}=-0.70\pm j0.18$$

$$H_a(s)=\frac{K}{(s^2+0.36s+0.49)(s^2+0.99s+0.49)(s^2+1.36s+0.49)};\quad K=0.12\quad (H_a(s)\big|_{s=0}=1)$$

或直接由表5-1

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c{}^6}{s^6+3.863\Omega_c s^5+7.464\Omega_c{}^2s^4+9.141\Omega_c{}^3s^3+7.464\Omega_c{}^4s^2+3.863\Omega_c{}^5s+\Omega_c{}^6}$$

展成部分分式

$$H_a(s)=\left[\frac{A}{s-(-0.18+j0.70)}+\frac{B}{s-(-0.18-j0.70)}\right]+\left[\frac{C}{s-(-0.50+j0.50)}+\frac{D}{s-(-0.50-j0.50)}\right]$$

$$+\left[\frac{E}{s-(-0.70+j0.18)}+\frac{F}{s-(-0.70-j0.18)}\right]$$

解得：

$$A=;B=;C=;D=;E=;F=$$

由$\dfrac{1}{s-s_i}\Leftrightarrow\dfrac{1}{1-e^{s_iT}z^{-1}}=\dfrac{z}{z-e^{s_iT}}$

$$\Rightarrow H(z)=$$

IIR滤波器设计2--往年真题

如果所要设计的数字低通滤波器满足下列条件：

(a) 在$w \le p\ /8$的通带范围内幅度变化不大于$3dB$,

(b) 在$p\ /2 \le w \le p$的阻带范围内幅度衰减不小于$20dB$,

试用脉冲响应不变变换法，设计相应的数字巴特沃斯低通滤波器，

(1) 确定滤波器的阶数N

(2) 确定滤波器的系统函数$H(z)$

(3)确定滤波器的频率响应$H(e^{jw})$

(4)给出滤波器的直接I型结构实现形式

03A(05-06)

提示：

(1)所有小数均计算到小数点后两位

(2)假设取样间隔$T = 1$

(3)双线性变换的频率变换关系为：

$$\Omega = 2/T tg(w/2)$$

(4)模拟巴特沃斯低通滤波器$H_a(s)$的极点为：

$$s_k = \Omega_c e^{jp[1/2+(2k-1)/(2N)]}, k = 1, 2, \mathbf{L}, N$$

(4)模拟巴特沃斯低通滤波器平方函数为：

$$A^2(\Omega) = 1/[1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}]$$

解：(1)由已知条件列出对模拟滤波器的衰减要求

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\Omega_c)\right| \ge -3dB \\ 20\lg\left|H_a(j\Omega_s)\right| \le -20dB \end{cases}$$

$$H(e^{jw}) = H_a(j\frac{w}{T}) = H_a(j\Omega),$$

$w = \Omega T$，$T = 1$

$$\Rightarrow \Omega_c = \frac{w_c}{T} = \frac{p}{8},\ \Omega_s = \frac{w_s}{T} = \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\frac{p}{8})\right| \ge -3dB \\ 20\lg\left|H_a(j\frac{p}{2})\right| \le -20dB \end{cases}$$

$$A^2(\Omega) = \left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\Rightarrow 20\lg\left|H_a(j\Omega)\right| = -10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10\lg\left[1+\left(\frac{p/8}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \ge -3dB \\ -10\lg\left[1+\left(\frac{p/2}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \le -20dB \end{cases}$$

取等号 $\begin{cases} 1+\left(\frac{p/8}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.3}\,(a) \\ 1+\left(\frac{p/2}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{2}\,(b) \end{cases}$

$\Omega_c = p/8 = 0.39$

解出：$N = 1.66$，取$N = 2$

(2)由巴特沃斯滤波器极点公式得到

$$s_k = \Omega_c e^{jp[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}]}, k = 1,2$$

$$\begin{cases} s_1 = \dfrac{p}{8} e^{jp\frac{3}{4}} \\ = 0.39(-0.707 + j0.707) \\ s_2 = \dfrac{p}{8} e^{jp\frac{5}{4}} \\ = 0.39(-0.707 - j0.707) \end{cases}$$

$$s_{1,2} = 0.28(-1 \pm j)$$

由表5-1

$$H_a(s) = \frac{0.15}{s^2 + 0.55s + 0.15}$$

(3)展成部分分式

$$H_a(s) = \frac{0.15}{s^2 + 0.55s + 0.15}$$

$$= \frac{A}{s-(-0.28+j0.28)} + \frac{B}{s-(-0.28-j0.28)}$$

解得 $\begin{cases} A = -0.28j \\ B = 0.28j \end{cases}$

$$H_a(s) = \frac{-0.28j}{s-(-0.28+j0.28)} + \frac{0.28j}{s-(-0.28-j0.28)}$$

由 $\dfrac{1}{s-s_k} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-e^{s_kT}z^{-1}} = \dfrac{z}{z-e^{s_kT}}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{-0.28j}{1-e^{(-0.28+j0.28)}z^{-1}} + \frac{0.28j}{1-e^{(-0.28-j0.28)}z^{-1}}$$

此处修订了符号错误
把课本（5-23）和
（5-43）（5-46）统一起来

$$H(z)=\frac{-0.28j}{1-e^{(-0.28+j0.28)}z^{-1}}+\frac{0.28j}{1-e^{(-0.28-j0.28)}z^{-1}}$$

$$=\frac{-0.28j(1-e^{(-0.28-j0.28)}z^{-1})+0.28j(1-e^{(-0.28+j0.28)}z^{-1})}{1-(e^{(-0.28-j0.28)}+e^{(-0.28+j0.28)})z^{-1}+e^{(-0.28+j0.28)}e^{(-0.28-j0.28)}z^{-2}}$$

$$=\frac{0.28je^{-0.28}(e^{-j0.28}-e^{j0.28})z^{-1}}{1-e^{-0.28}(e^{-j0.28}+e^{j0.28})z^{-1}+e^{-0.56}z^{-2}}$$

$$=\frac{0.28je^{-0.28}\cdot(-2j)\cdot\sin(0.28)z^{-1}}{1-e^{-0.28}\cdot 2\cdot\cos(0.28)z^{-1}+e^{-0.56}z^{-2}}$$

$$=\frac{0.28\cdot j\cdot 0.76\cdot(-2j)\cdot 0.77z^{-1}}{1-0.76\cdot 2\cdot 0.64z^{-1}+0.57z^{-2}}$$

$$=\frac{0.33z^{-1}}{1-0.97z^{-1}+0.57z^{-2}}$$

此处修订了符号错误
把课本（5-23）和
（5-43）（5-46）统一起来

$$H(z)=\frac{0.33z^{-1}}{1-0.97z^{-1}+0.57z^{-2}}$$

(5)频率响应

$$H(e^{jw})=H(z)\big|_{z=e^{jw}}$$

(6)滤波器结构

直接I，II