数字信号处理

周治国

2015.11

第五章 数字滤波器

§5-3 IIR数字滤波器设计

IIR数字滤波器设计

- 一、从模拟滤波器设计数字滤波器
  - 1、从模拟低通滤波器设计数字低通滤波器
    - （1）脉冲/阶跃响应不变法
    - （2）双线性变换法
  - 2、IIR数字低通滤波器的频率变换（高通、带通、带阻数字滤波器的设计
    - （1）直接由模拟原型到各种类型数字滤波器的转换
    - （2）从数字低通滤波器到各种类型数字滤波器的转换
- 二、直接设计IIR数字滤波器
  - 1、IIR数字低通滤波器的频域直接设计方法
    - （1）零、极点位置累试法（点阻滤波器）
    - （2）幅度平方函数法
  - 2、IIR数字低通滤波器的时域直接设计方法
    - （1）帕德逼近法
    - （2）波形形成滤波器设计
- 三、IIR数字滤波器的优化设计方法
  - 1、最小均方误差方法
  - 2、最小p误差方法
  - 3、最小平方逆设计法
  - 4、线性规划设计方法

IIR 数字滤波器:

系统函数

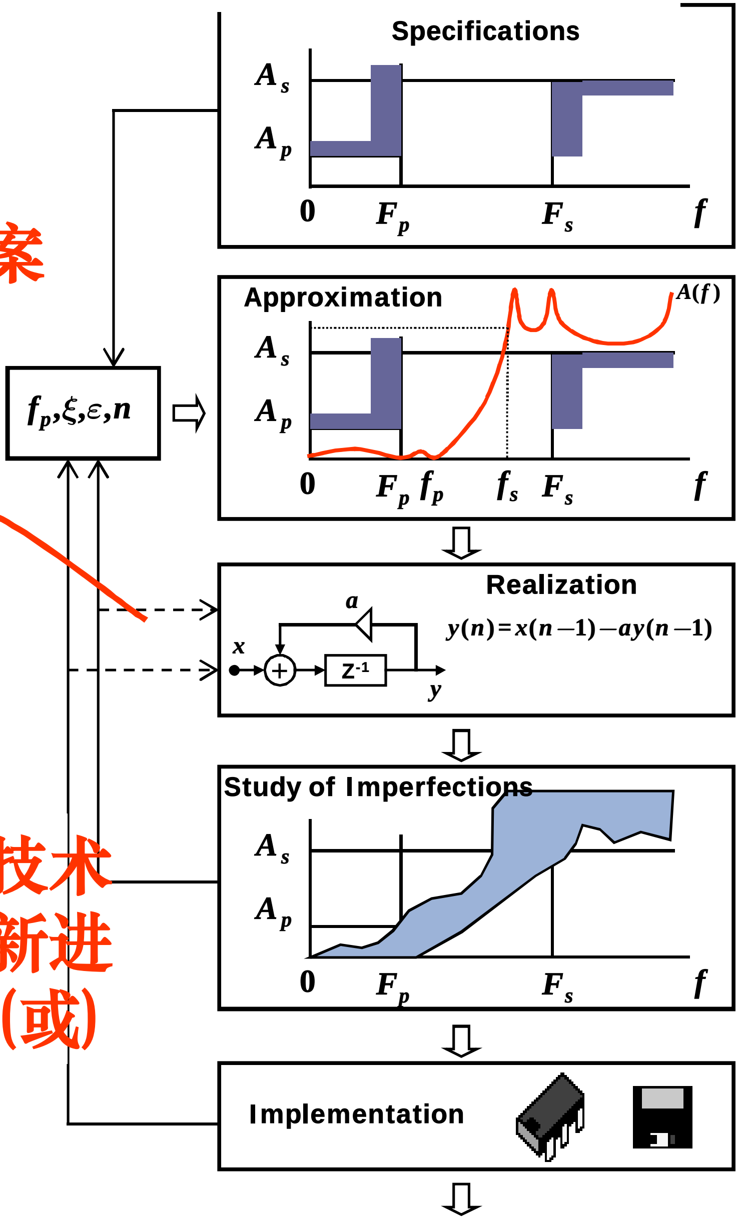
$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=A\frac{\prod_{i=1}^{M}(1-c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N}(1-d_i z^{-1})}$$

差分方程

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)+\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

数字滤波器设计的四个步骤

滤波器实现方案并不唯一！



技术指标： 按设计任务，确定滤波器性能要求，制定技术指标；

函数逼近： 根据技术指标构造某一有理传递函数 H(z)；

中心任务：系统函数

有限精度实现： 将传递函数转化为方框图或程序(软件)，要求经济、简单、廉价、字长短、动态范围高。

缺陷研究： 考虑滤波器系数的量化效应，乘积量化影响(非相关舍入或舍入噪声)和动态范围限制

产品实现： 用硬件如(DSP、专用硬件，VLSI芯片等)或普通计算机、专用计算机实现

如果不能满足技术要求，则需重新进行函数逼近和(或)电路实现

数字滤波器系统函数特性

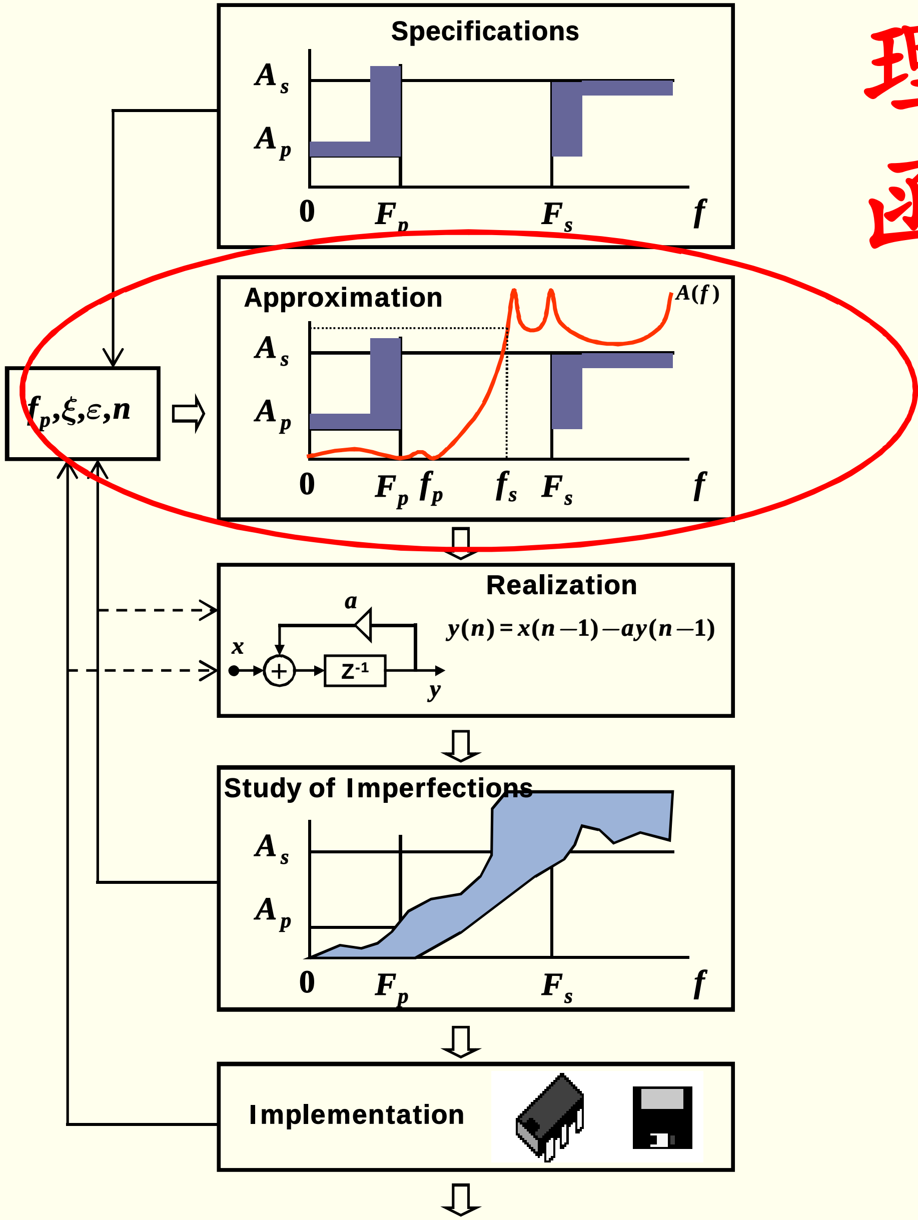
（1） 幅度平方响应(Magnitude Response)

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = \left|H(z)H(z^{-1})\right|_{z=e^{j\omega}}$$

（2） 相位响应(Phase Response)：对输出波形有要求：语音合成、波形传输、图像处理

（3） 群延迟(Group Delay)：相位响应对频率导数的负值：常数-> 线性相位

数字滤波器设计



理解：

函数逼近

IIR数字滤波器设计方法

方法1. 先设计一个合适的模拟滤波器，将其数字化，即将S平面映射到Z平面；

方法2. 在Z平面直接设计IIR数字滤波器，给出闭合形式的公式；（参考系统频率响应几何法）

方法3. 利用最优化技术设计参数，选定极点和零点在Z平面上的合适位置，在某种最优化准则意义上逼近所希望的响应。

模拟滤波器数字化设计法的优点

1. 可以利用模拟滤波器较为成熟的设计理论和方法；

2. 很多模拟滤波器设计方案具有简单的闭式设计公式，由此可得到简单的数字滤波器设计。

常用模拟低通滤波器的特性

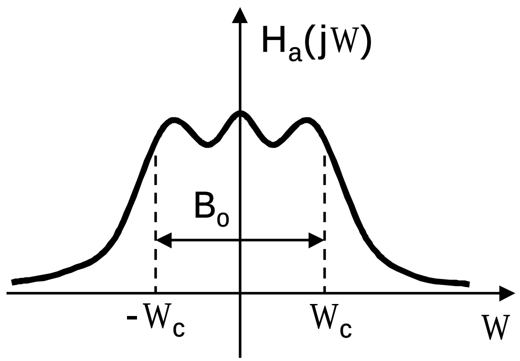
巴特沃思滤波器（Butterworth Filter）

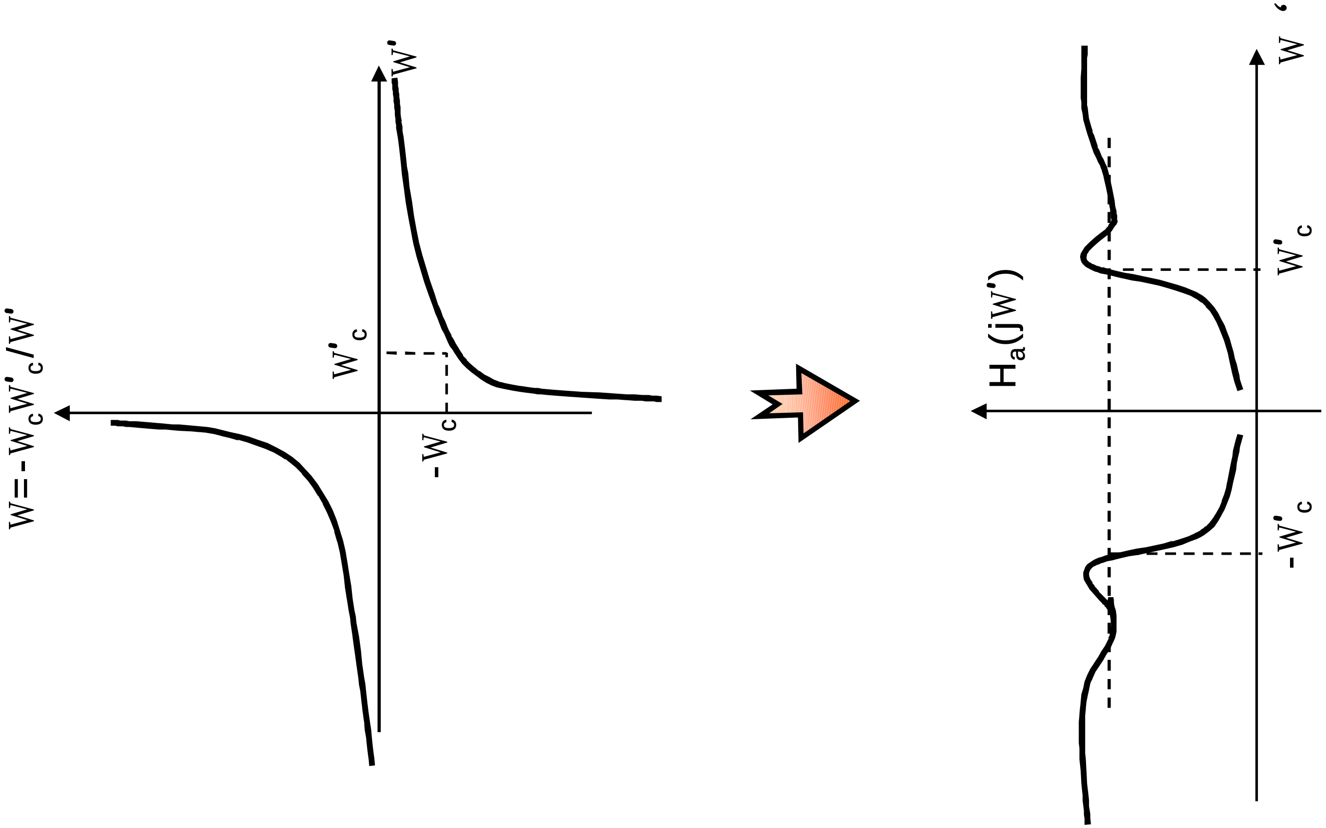
切比雪夫滤波器（Chebyshev Filter）

– Chebyshev Type I

– Chebyshev Type II

为什么以低通为原型?





模拟滤波器的设计-》模拟系统函数

$$H_a(s)$$

P177

根据幅度平方函数确定系统函数

$$A^2(\Omega) = \left|H_a(j\Omega)\right|^2$$

$$= H_a(s)H_a(-s)\Big|_{s=j\Omega}$$

如何由$A^2(\Omega)$确定$H_a(s)$?

P178

Butterworth Filter：巴特沃思滤波器

•

•低通巴特沃思滤波器是全极点系统

• N 阶幅度平方频率响应为

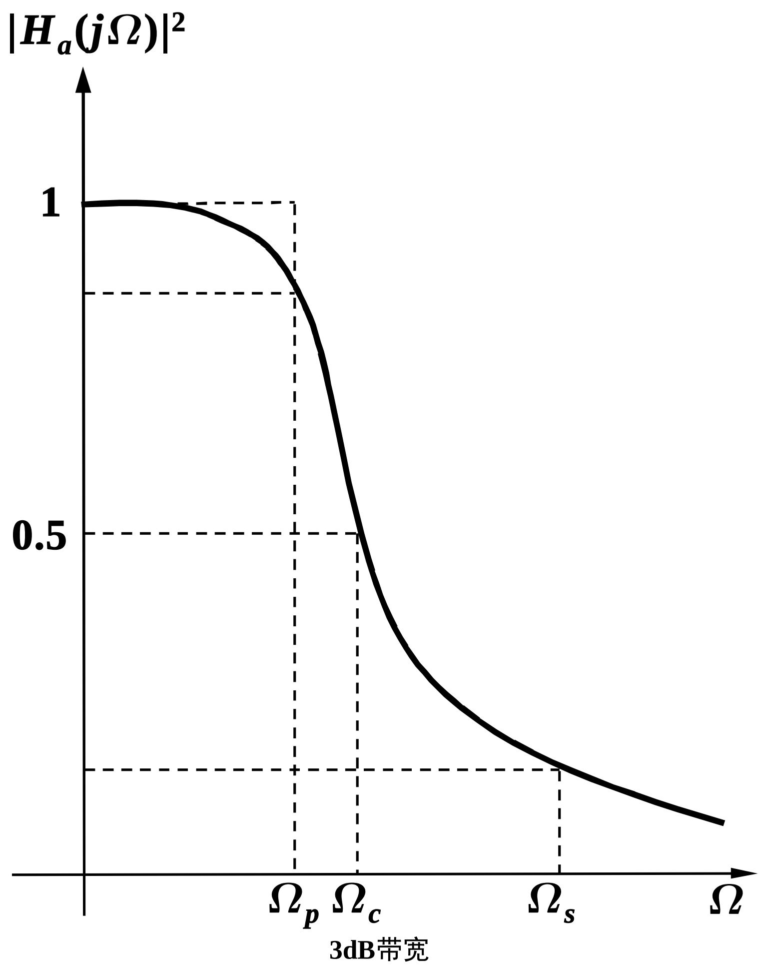
$$A^2(\Omega) = |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

其中N为滤波器阶数，

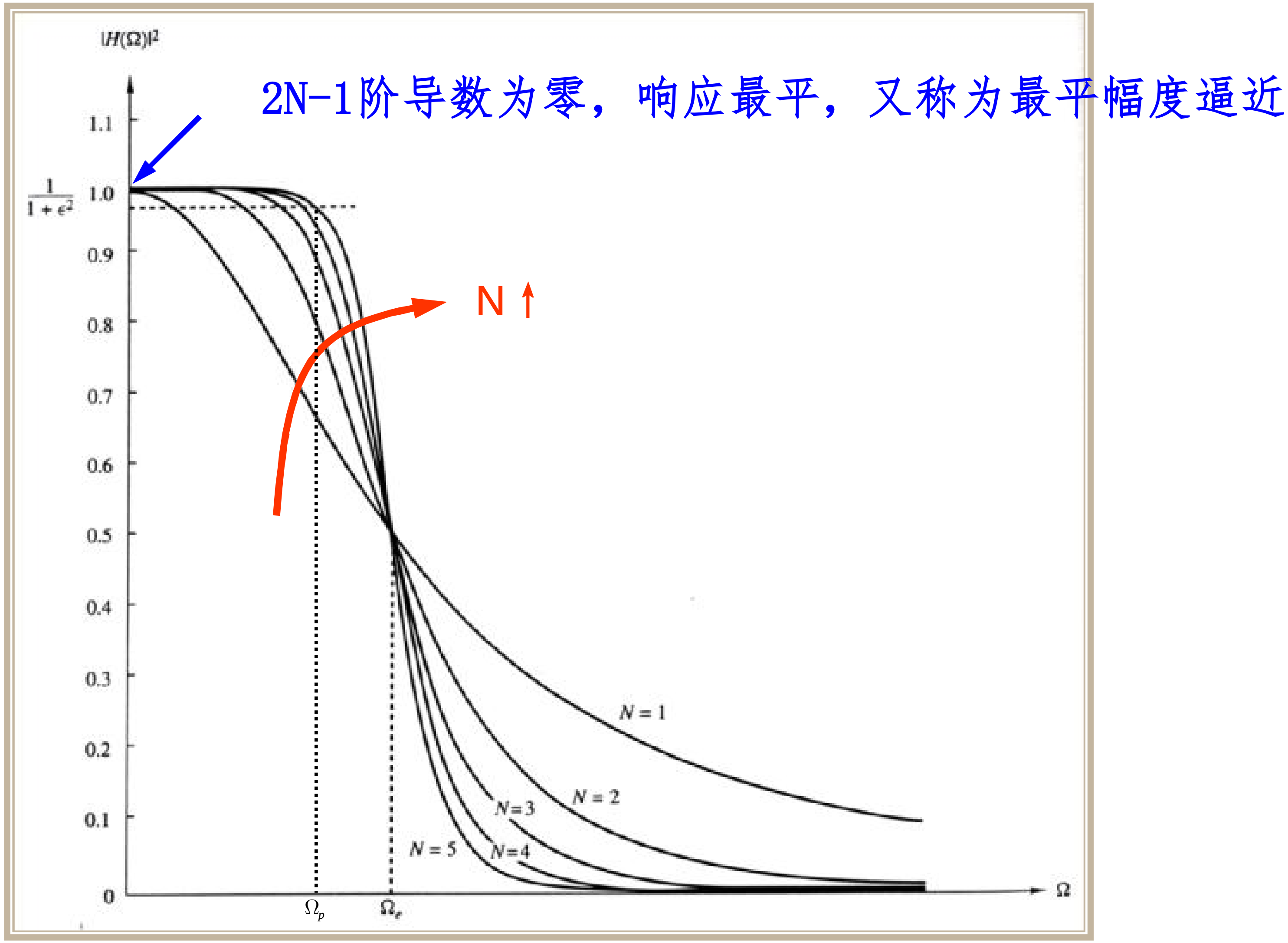
Ω_c为3dB截止频率；

Ω_p为通带截止频率；

Ω_s为阻带截止频率



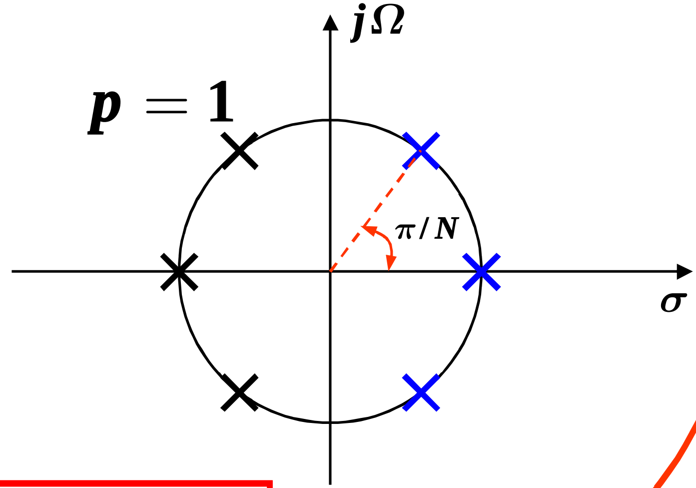
Magnitude-squared frequency response of lowpass Butterworth filters



Butterworth Filter：巴特沃思滤波器

$$H_a(s)H_a(-s)=A^2(\Omega)\Big|_{\Omega=-js}=|H_a(j\Omega)|^2\Big|_{\Omega=-js}$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$



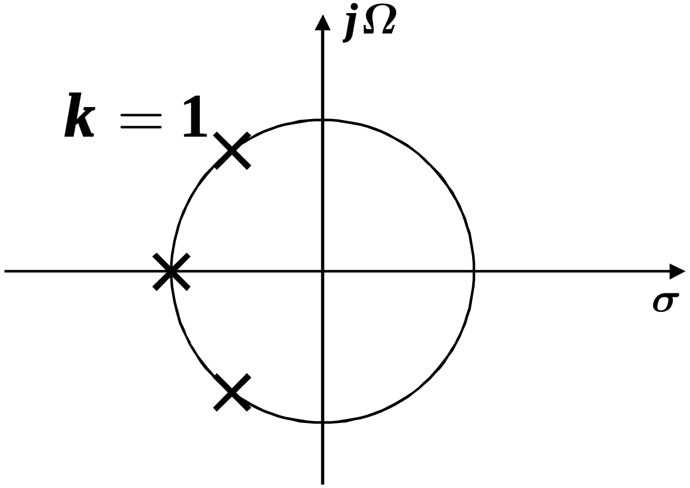
其极点为：

$$s_p=\left(-1\right)^{\frac{1}{2N}}\left(j\Omega_c\right)=\Omega_c e^{j\pi\left[\frac{1}{2}+\frac{2p-1}{2N}\right]}$$

$$=\Omega_c\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2p-1}{2N}\pi\right)+j\Omega_c\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2p-1}{2N}\pi\right)$$

$p=1,2,\ldots,2N$

- 滤波器之阶数：N
- 3dB截止频率：Ω_c



$$H_a(s)=\frac{K}{\prod_{k=0}^{N-1}(s-s_k)}$$ （因果稳定）

$$s_k=\Omega_c e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k-1}{2N}\pi\right)};$$

$$k=1,2,\ldots,N$$

给定指标，如何求 N & Ω_c？

给定技术要求：

- 在通带范围内允许的最大衰减为α_p(dB)，截止频率为Ω_p
- 在阻带范围内允许的最小衰减为α_s(dB)，临界频率为Ω_s

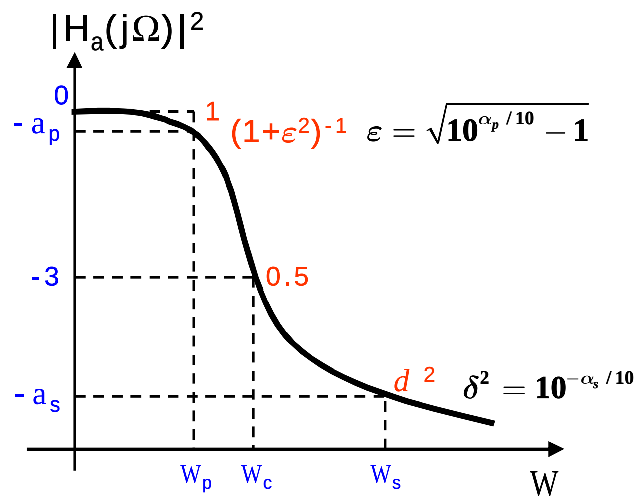
$$10\lg\left[\frac{1}{|H_a(j\Omega_p)|^2}\right] \le \alpha_p \Rightarrow 10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \le \alpha_p$$

$$10\lg\left[\frac{1}{|H_a(j\Omega_s)|^2}\right] \ge \alpha_s \Rightarrow 10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \ge \alpha_s$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^N \ge \sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}$$

$$\Rightarrow N \ge \frac{\lg\left(\sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}\right)}{\lg\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} = \frac{\lg\left(\frac{\sqrt{\delta^{-2}-1}}{\varepsilon}\right)}{\lg\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}$$

$$\Omega_c \in \left[\Omega_p\left(10^{\frac{\alpha_p}{10}}-1\right)^{-\frac{1}{2N}}, \Omega_s\left(10^{\frac{\alpha_s}{10}}-1\right)^{-\frac{1}{2N}}\right]$$



Chebyshev Filters：切比雪夫滤波器

- 切比雪夫I型模拟低通滤波器
- N 阶幅度平方频率响应为

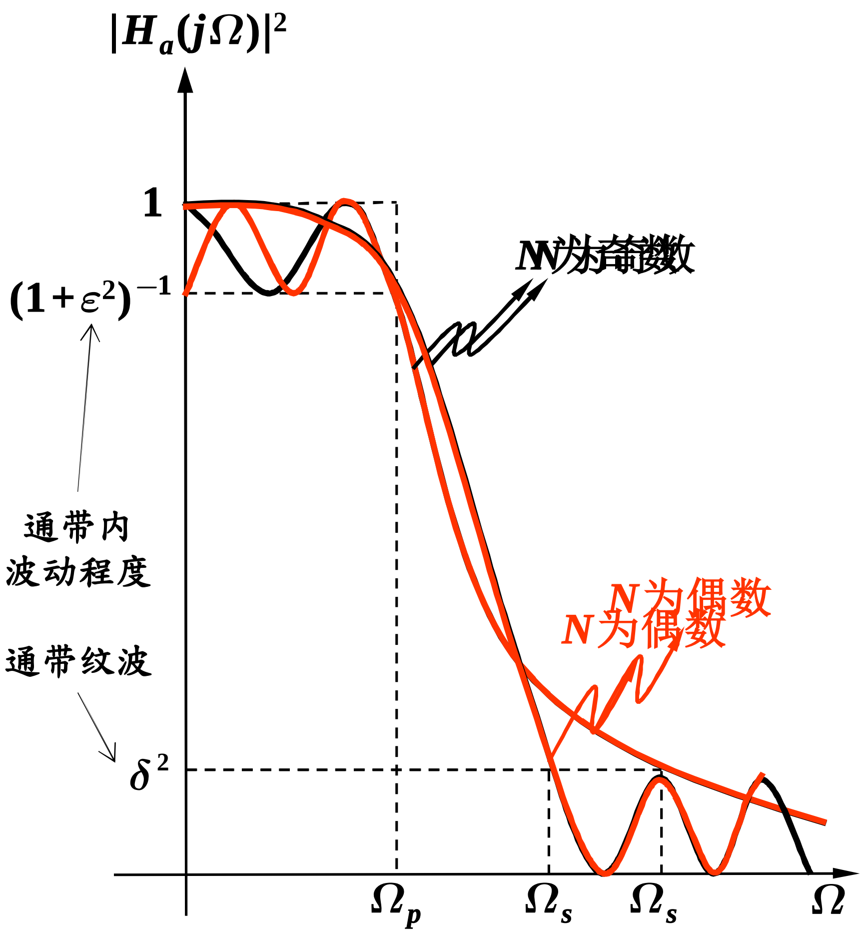
$$A^2(\Omega)=|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$$

其中$C_N(\Omega)$为N阶切比雪夫多项式：

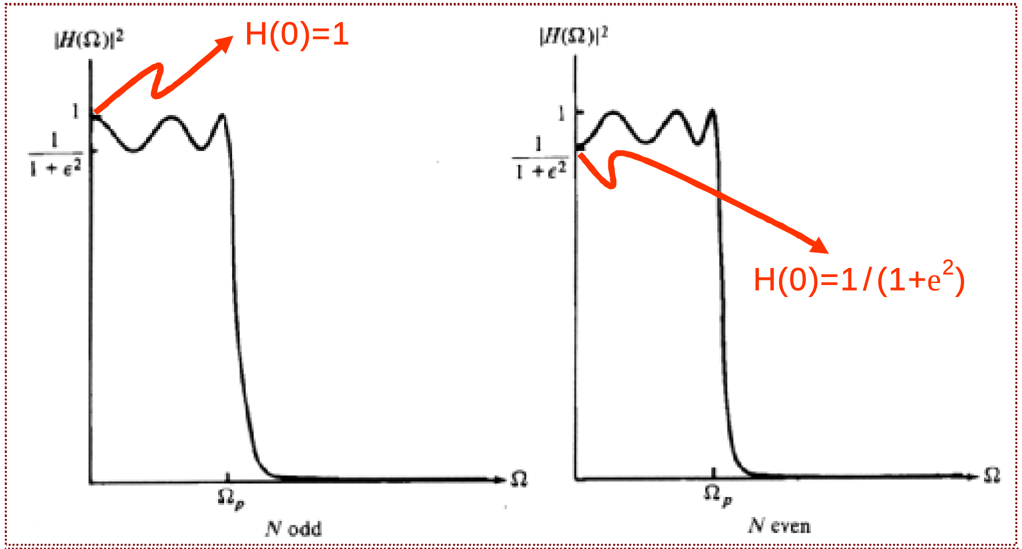
$$C_N(\Omega)=\begin{cases}\cos[N\cos^{-1}(\Omega)] & |\Omega|\le 1\\ \cosh[N\cosh^{-1}(\Omega)] & |\Omega|>1\end{cases}$$

- 切比雪夫II型（逆切比雪夫）模拟低通滤波器

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2\left[\dfrac{C_N(\Omega_s/\Omega_p)}{C_N(\Omega_s/\Omega)}\right]^2}$$

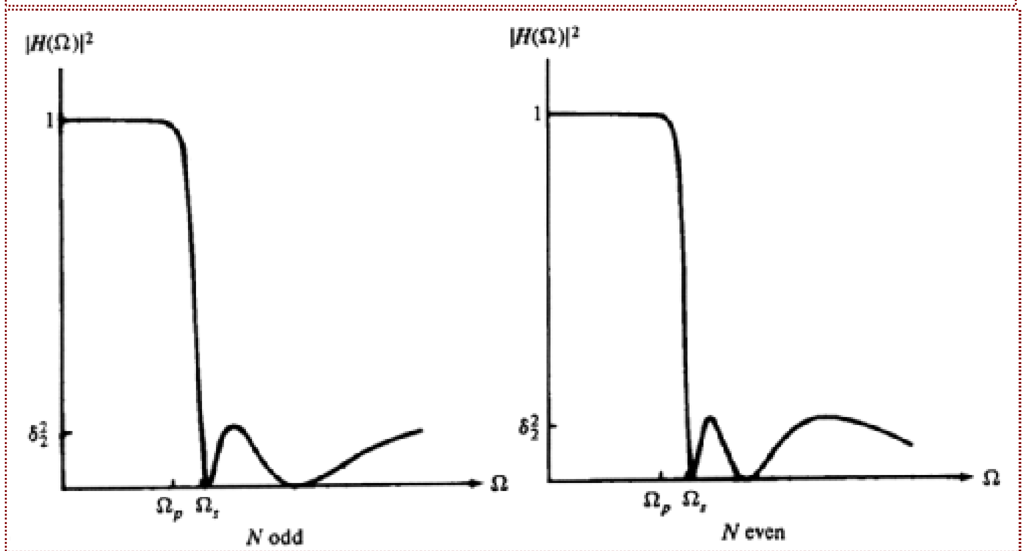


Chebyshev Filters：切比雪夫滤波器



Frequency response of
lowpass Type I Chebyshev filter

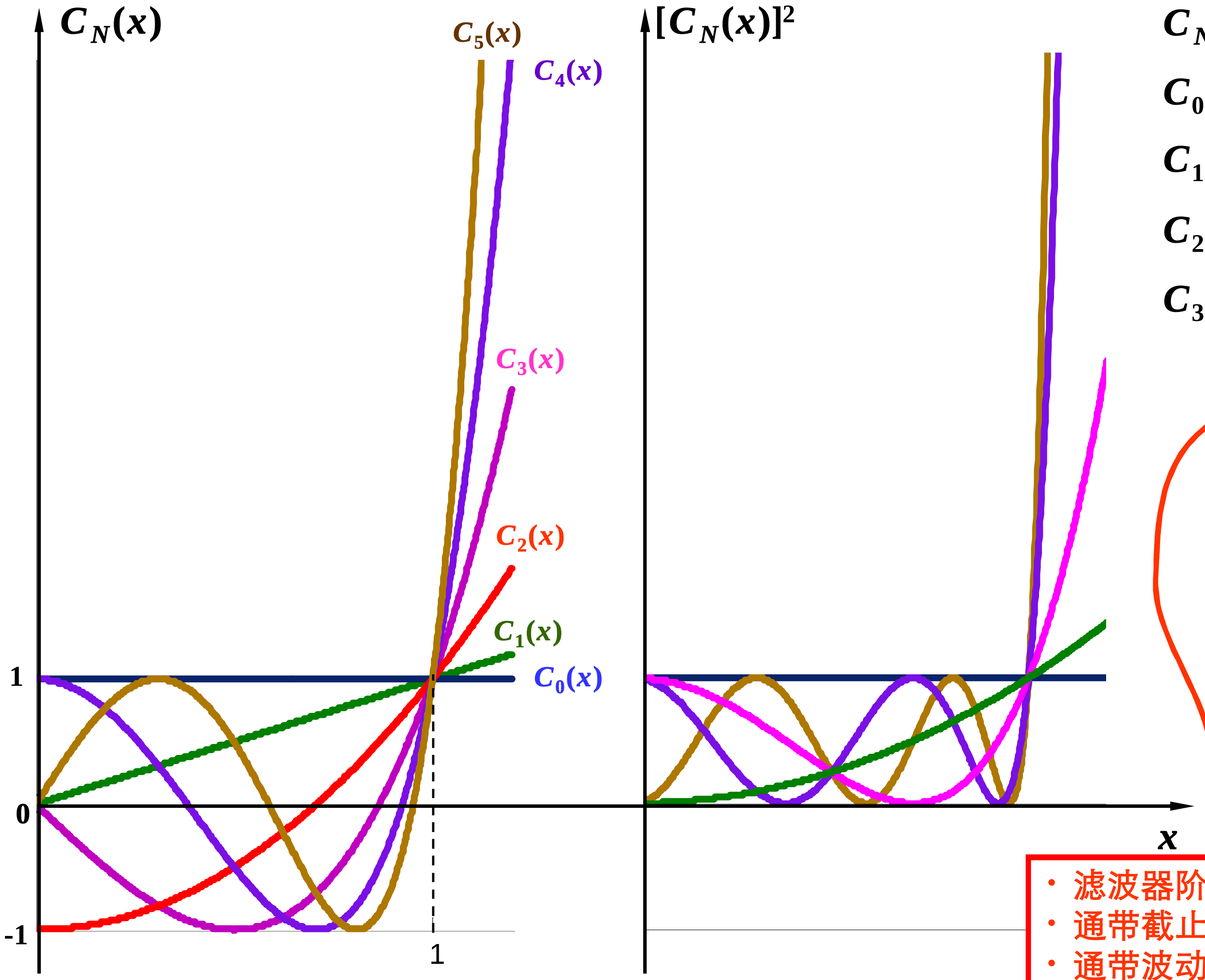
$|H(\Omega)|^2 = 1/[1 + \varepsilon^2 C_N{}^2(\Omega/\Omega_p)]$



Frequency response of
lowpass Type II Chebyshev filter

$|H(\Omega)|^2 = 1/[1 + \varepsilon^2\{C_N{}^2(\Omega_s/\Omega_p)/C_N{}^2(\Omega_s/\Omega)\}]$

Chebyshev Filters：切比雪夫滤波器



$$C_{N+1}(x) = 2xC_N(x) - C_{N-1}(x)$$

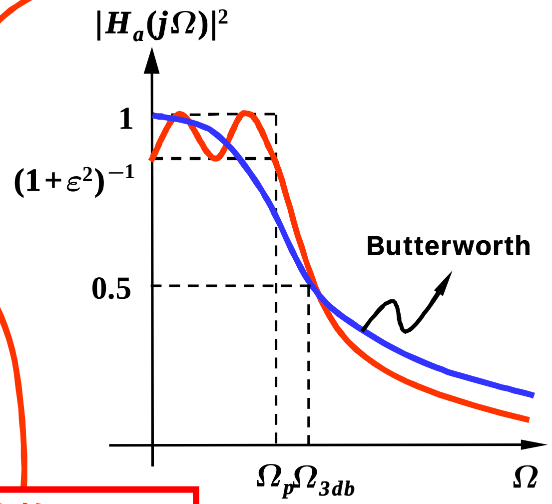
$$C_0(x) = 1$$

$$C_1(x) = x$$

$$C_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$C_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$N = 4$



- 滤波器阶数：N
- 通带截止频率：Ω_p
- 通带波动：ε

给定指标，如何求 ε, N & Ω_p？

给定技术要求：

- 在通带范围内允许的最大衰减为α_p(dB)，截止频率为Ω_p
- 在阻带范围内允许的最小衰减为α_s(dB)，临界频率为Ω_s

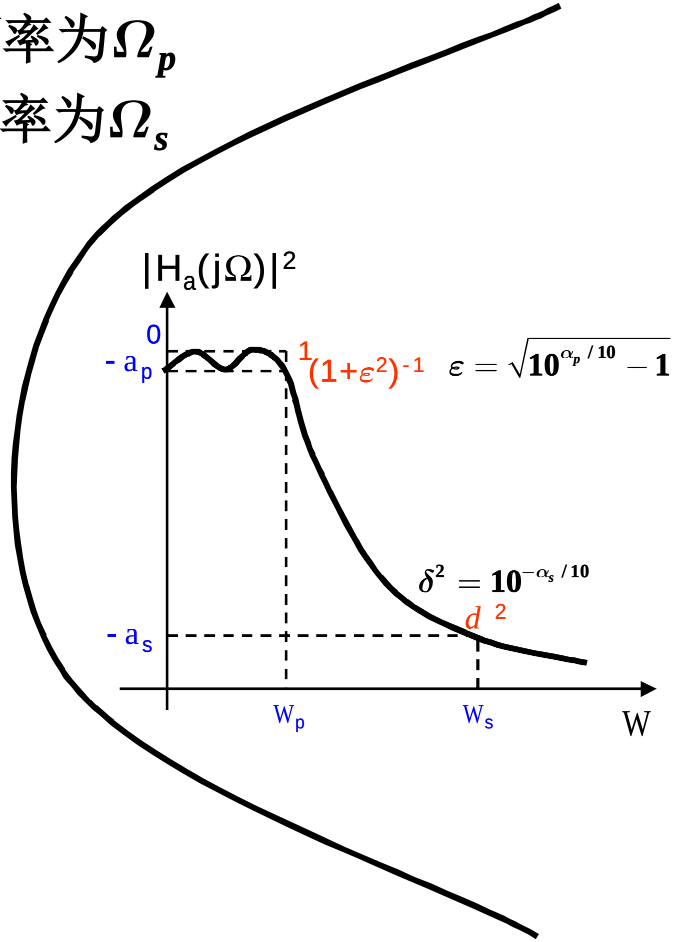
(1) $$\boxed{10\lg\left(\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right) = -\alpha_p} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{\alpha_p/10} - 1}$$

(2) $$10\lg[|H_a(j\Omega_s)|^2] \le -\alpha_s$$

$$\Rightarrow C_N(\Omega_s/\Omega_p) \ge \varepsilon^{-1}\sqrt{10^{\alpha_s/10} - 1} = \sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1}}$$

$$\Rightarrow \cosh[N\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)] \ge \varepsilon^{-1}\sqrt{10^{\alpha_s/10} - 1}$$

$$\Rightarrow N \ge \frac{\cosh^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1}}\right)}{\cosh^{-1}\left(\Omega_s/\Omega_p\right)} = \frac{\cosh^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{\delta^{-2} - 1}}{\varepsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\Omega_s/\Omega_p\right)}$$



两种模拟低通幅度逼近方法的比较：

巴特沃思滤波器	切比雪夫Ⅰ型滤波器
① **幅度平方响应** $A^2(\Omega)=\lvert H_a(j\Omega)\rvert^2=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}=\dfrac{1}{1+\varepsilon^2\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_p}\right)^{2N}}$ $Q(s)=H_a(s)H_a(-s)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$	① **幅度平方响应** $A^2(\Omega)=\lvert H_a(j\Omega)\rvert^2=\dfrac{1}{1+\varepsilon^2C_N^2\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$ $Q(s)=H_a(s)H_a(-s)=\dfrac{1}{1+\varepsilon^2C_N^2\left(\dfrac{s}{j\Omega_p}\right)}$
② **通、阻带衰减要求：** $\alpha_p\setminus\varepsilon$，$\alpha_s\setminus\delta$	② **通、阻带衰减要求：** $\alpha_p\setminus\varepsilon$，$\alpha_s\setminus\delta$
③ **滤波器阶数 N 和截止频率 ω_c** $N\geq\lg\left[\varepsilon^{-1}(\delta^{-2}-1)^{1/2}\right]/\lg(\Omega_s/\Omega_p)$ $=\lg\left[\sqrt{\dfrac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}\right]\Big/\lg(\Omega_s/\Omega_p)$ ； $\Omega_c=\Omega_p\varepsilon^{-1/N}$	③ **滤波器阶数 N** $N\geq\cosh\left[\varepsilon^{-1}(\delta^{-2}-1)^{1/2}\right]/\cosh(\Omega_s/\Omega_p)$ $=\cosh\left[\sqrt{\dfrac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}\right]\Big/\cosh(\Omega_s/\Omega_p)$
④ **左半平面极点位置** $s_k=\Omega_c e^{j\left[\frac{(2k+1)}{2N}+\frac{1}{2}\right]\pi},k=0\sim N-1$	④ **左半平面极点位置** $s_k=\Omega_p\left[\frac{\gamma-\gamma^{-1}}{2}\right]\cos\phi_k+j\Omega_p\left[\frac{\gamma+\gamma^{-1}}{2}\right]\sin\phi_k,k=0\sim N-1$ $\phi_k=\frac{(2k+1)\pi}{2N}+\frac{\pi}{2};\gamma=\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}+1}{\varepsilon}\right)^{1/N}$
⑤ **频率响应** $H_a(s)=\left[(-1)^N\prod_{k=0}^{N-1}s_k\right]\Big/\left[\prod_{k=0}^{N-1}(s-s_k)\right]$	⑤ **频率响应** $H_a(s)=\begin{cases}\left[-\prod_{k=0}^{N-1}s_k\right]\Big/\left[\prod_{k=0}^{N-1}(s-s_k)\right] & N:odd\\ \left[(1+\varepsilon^2)^{-1/2}\prod_{k=0}^{N-1}s_k\right]\Big/\left[\prod_{k=0}^{N-1}(s-s_k)\right] & N:even\end{cases}$