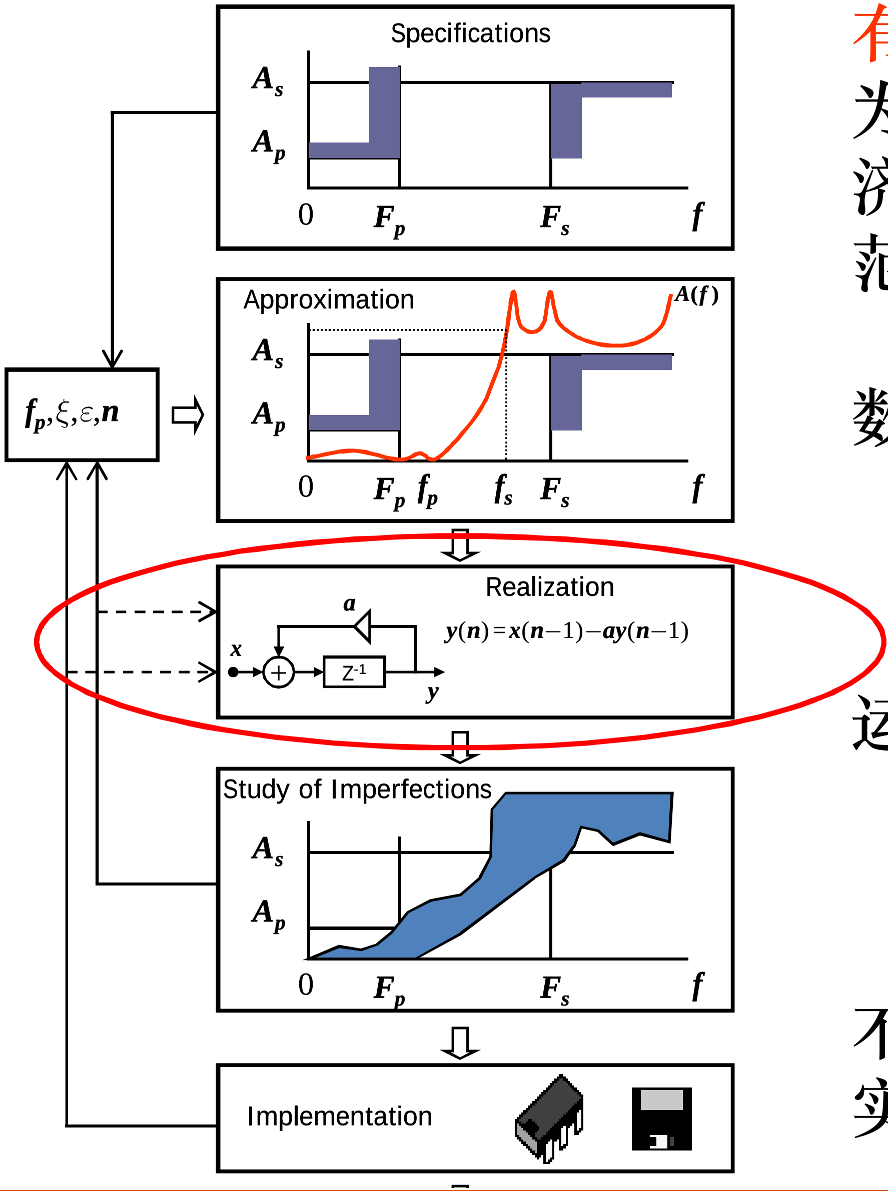
数字信号处理

周治国

2015.11

第五章　数字滤波器

§5-2 数字滤波器的结构



有限精度实现：将传递函数转化为方框图或程序(软件)，要求经济、简单、廉价、字长短、动态范围高。

数字滤波器：

差分方程

单位取样响应

系统函数

运算结构：

方框图

流图

不考虑量化影响时，这些不同的实现方法是等价的。

§ 5-2 数字滤波器的结构

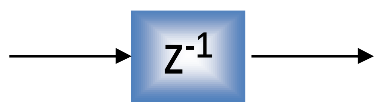
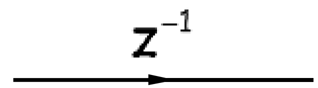
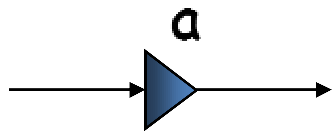
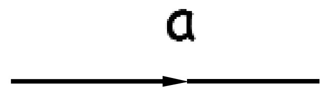
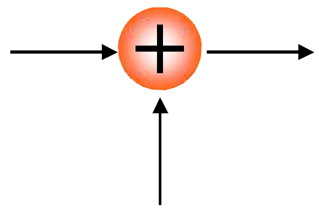
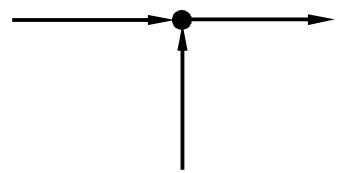
为什么要研究数字滤波器的实现结构?

1．滤波器的基本特性（如有限长取样响应FIR与无限长取样响应IIR）决定了结构上有不同的特点；

2．不同结构所需的存储单元及乘法次数不同，前者影响复杂性，后者影响运算速度；

3．有限精度（有限字长）实现情况下，不同运算结构的精度及稳定性不同；

4．好的滤波器结构应使得滤波器性能易于控制，适合于模块化实现，便于时分复用。

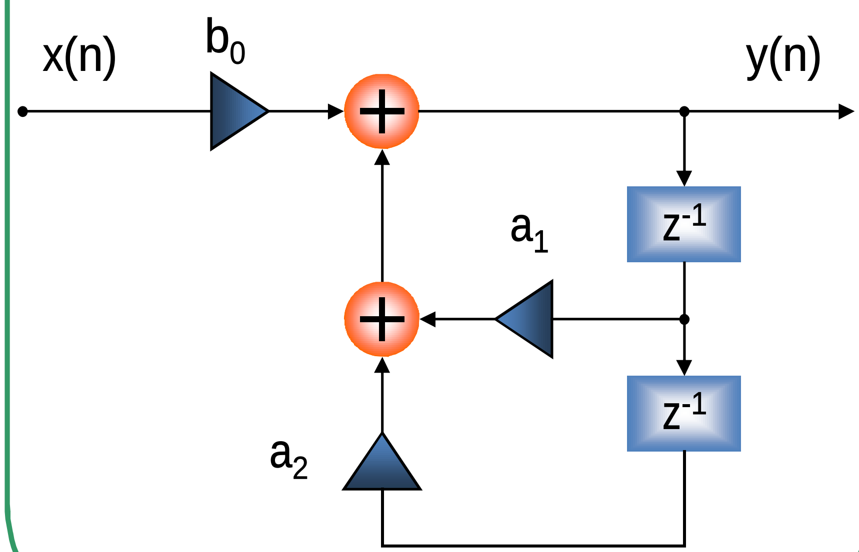
基本运算单元	方框图	流图
单位延时		
常数乘法器		
加法器		

block diagram & flow graph

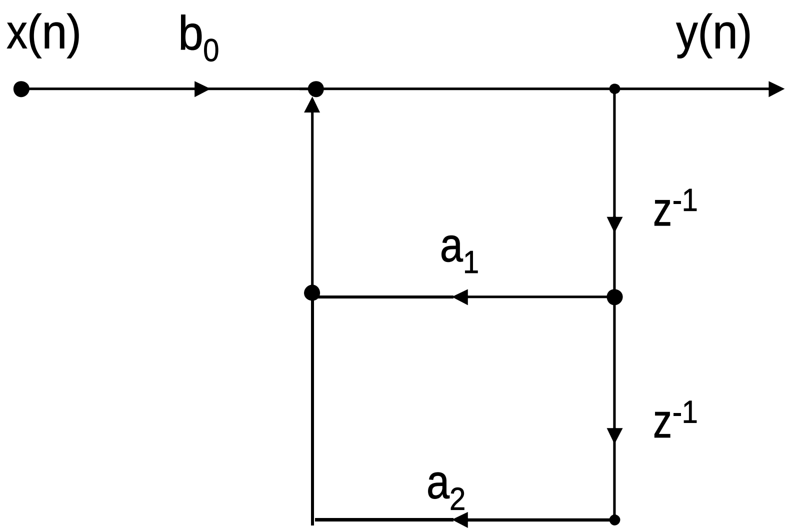
例：二阶数字滤波器

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$

方框图结构



流图结构



回顾：用系统函数分析LTI系统

LTI系统除了可以用线性常系数差分方程和单位取样响应描述外，还可以用系统函数来描述

<u>系统函数</u>定义为

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

可见，系统函数实际是单位取样响应的z变换

一个因果性的LTI系统的差分方程可表示为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

real

§5-2 数字滤波器的结构

IIR 数字滤波器的特点：

系统函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

差分方程

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)+\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

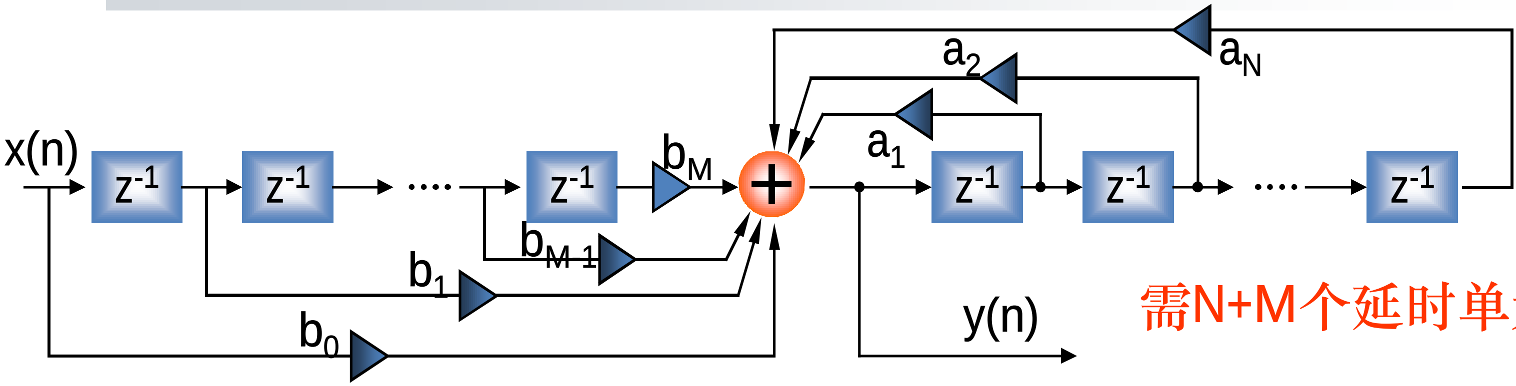
1）系统的单位抽样响应$h(n)$无限长

2）系统函数$H(z)$在有限z平面（$0<|z|<\infty$）上有极点存在

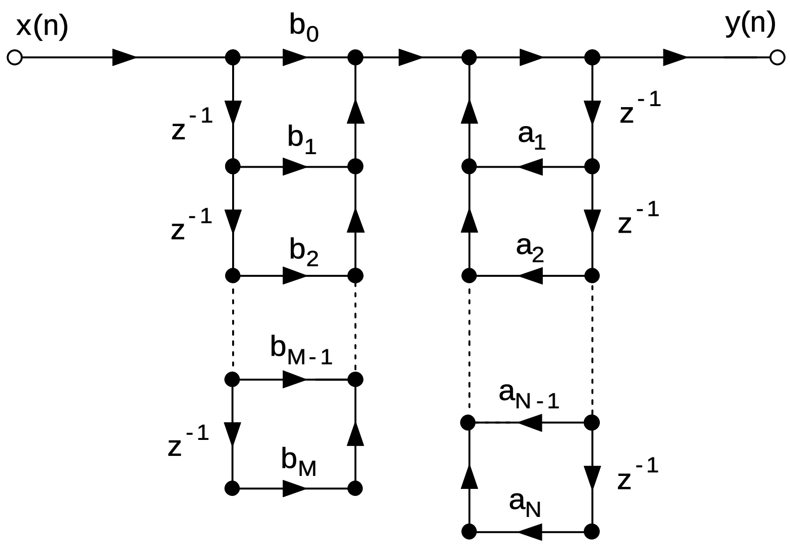
3）存在输出到输入的反馈，递归型结构: 直接型Ⅰ、Ⅱ，级、并联型

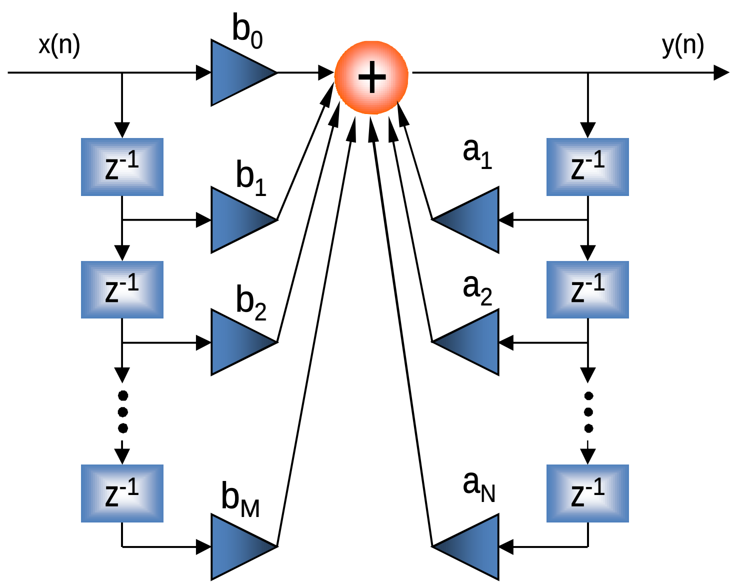
1、直接型 I

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)$$

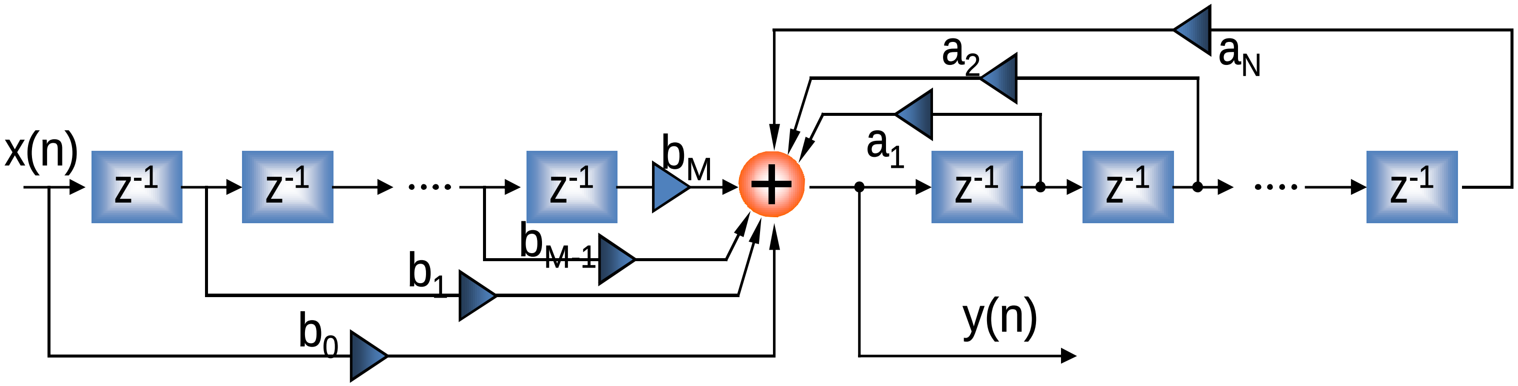


需N+M个延时单元





直接型 I 之特点



（1）两个网络级联：第一个横向结构 M 节延时网络实现零点，第二个有反馈的 N 节延时网络实现极点

（2）共需（ $N+M$ ）级延时单元

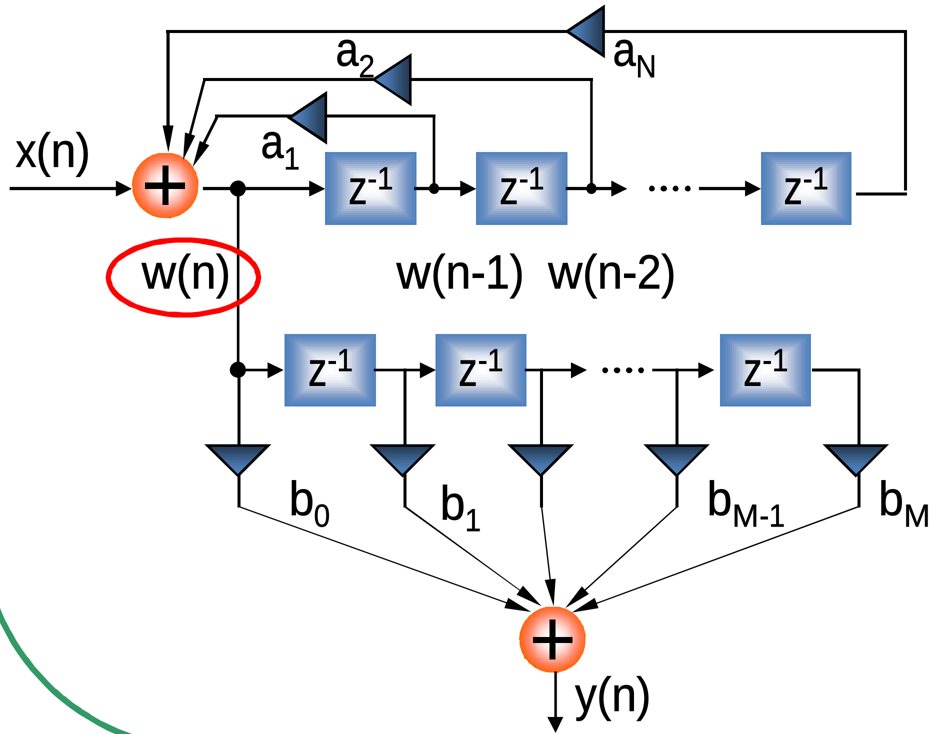
（3）系数 a_i，b_i 不直接决定单个零极点，因而不能很好地进行滤波器性能控制

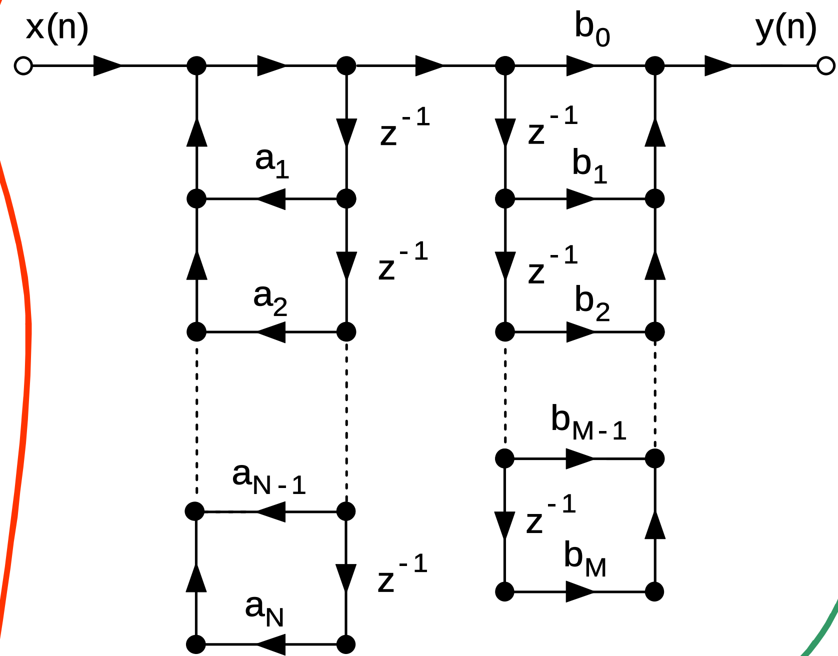
（4）极点对系数的变化过于灵敏，从而使系统频率响应对系统变化过于灵敏，也就是对有限精度（有限字长）运算过于灵敏，容易出现不稳定或产生较大误差

2、直接型 II (典范型)

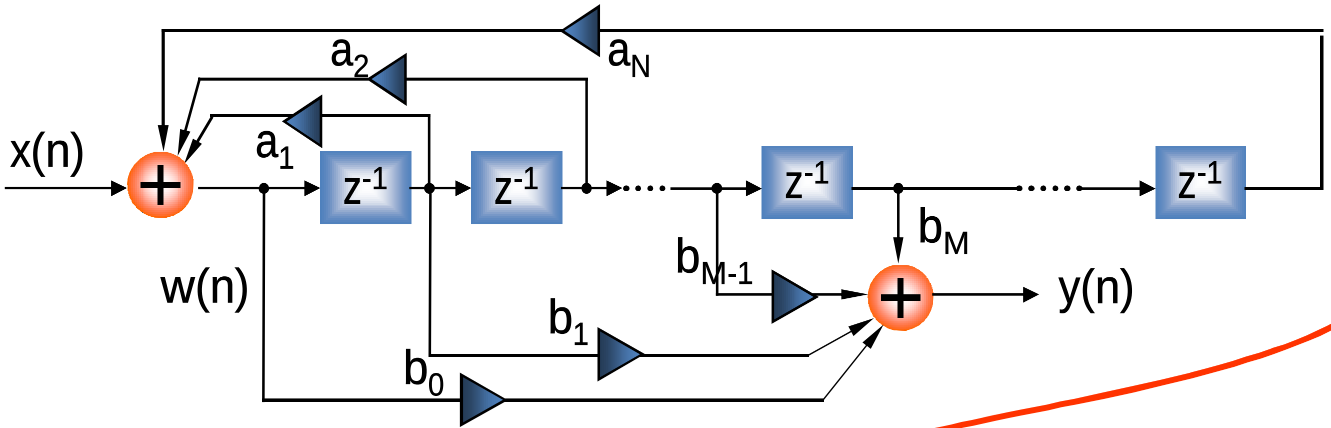
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\underbrace{\left(\frac{1}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}\right)}_{\triangleq\frac{W(z)}{X(z)}\text{:all poles}}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}\right)}_{\triangleq\frac{Y(z)}{W(z)}\text{:all zeros}}=\frac{W(z)}{X(z)}\cdot\frac{Y(z)}{W(z)}$$

$$\Rightarrow w(n)=x(n)+\sum_{k=1}^{N}a_k w(n-k),\ y(n)=\sum_{r=0}^{M}b_r w(n-r)$$

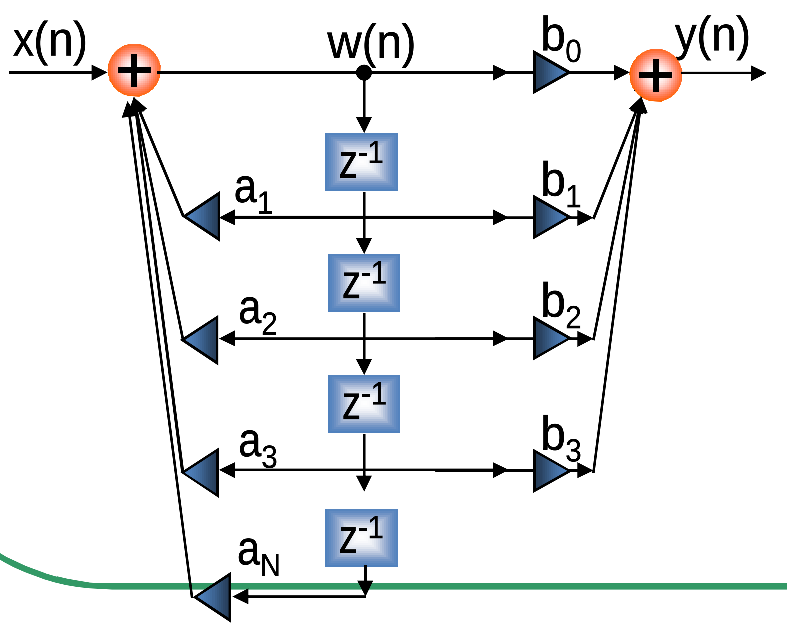


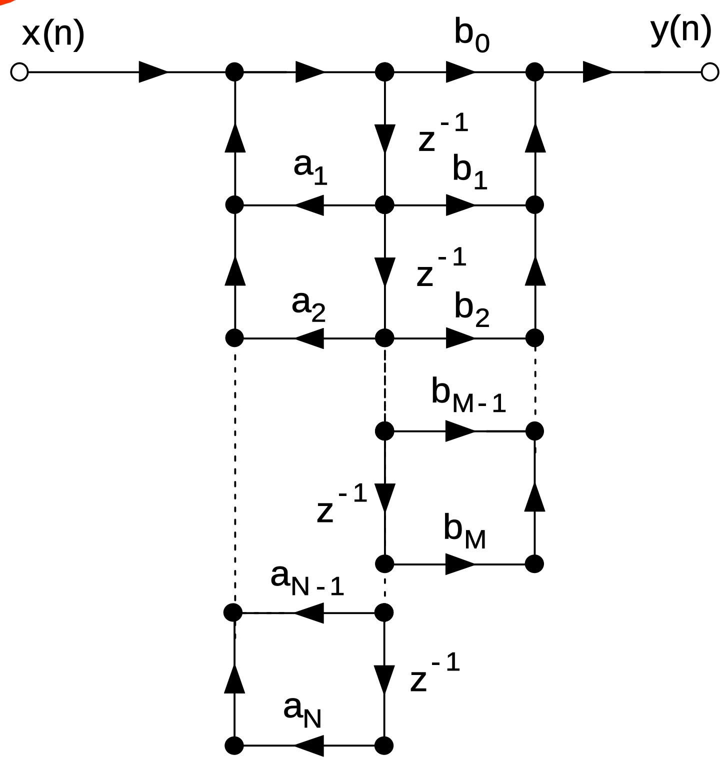


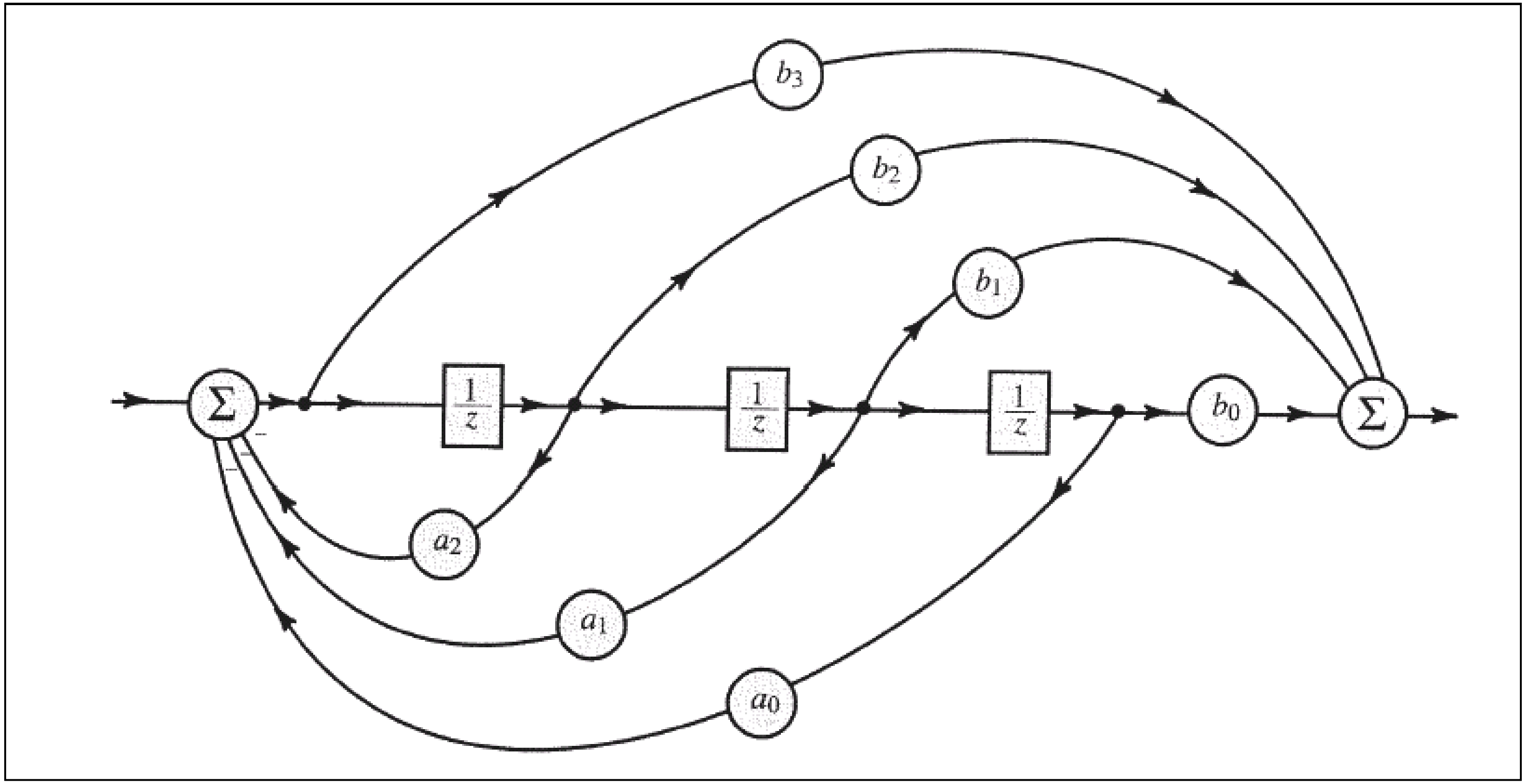
2、直接型 II (典范型)



只需实现 N 阶滤波器所需的最少的 N 个延时单元，故又称典范型: N ≥ M







- Tapped-delay line (N or M) delays
- N + M + 1 multipliers
- 2 adders (N and M+1 inputs)

2、直接型 II (典范型)

3、转置型

转置定理-针对方框图

1.支路方向反向
2.输入输出位置互换
3.分支节点和相加节点互换

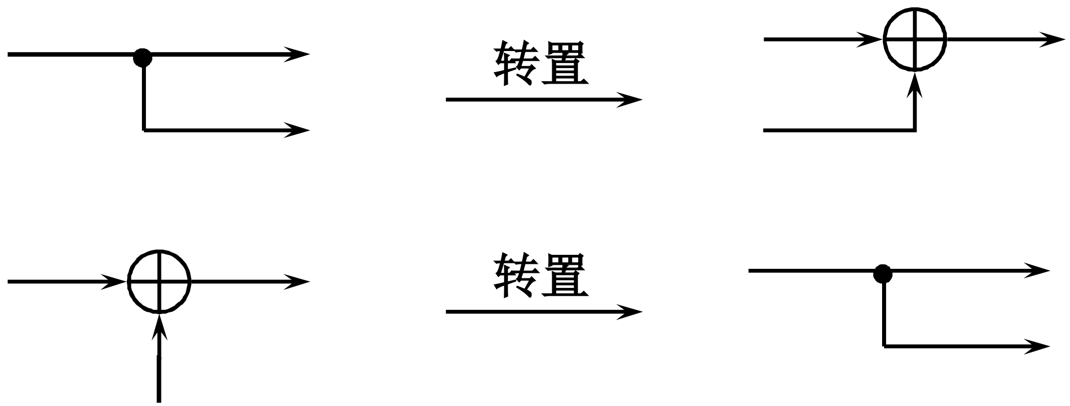


图5-4 $\Longrightarrow$ 图5-5 转置的直接型II结构
(P.167)

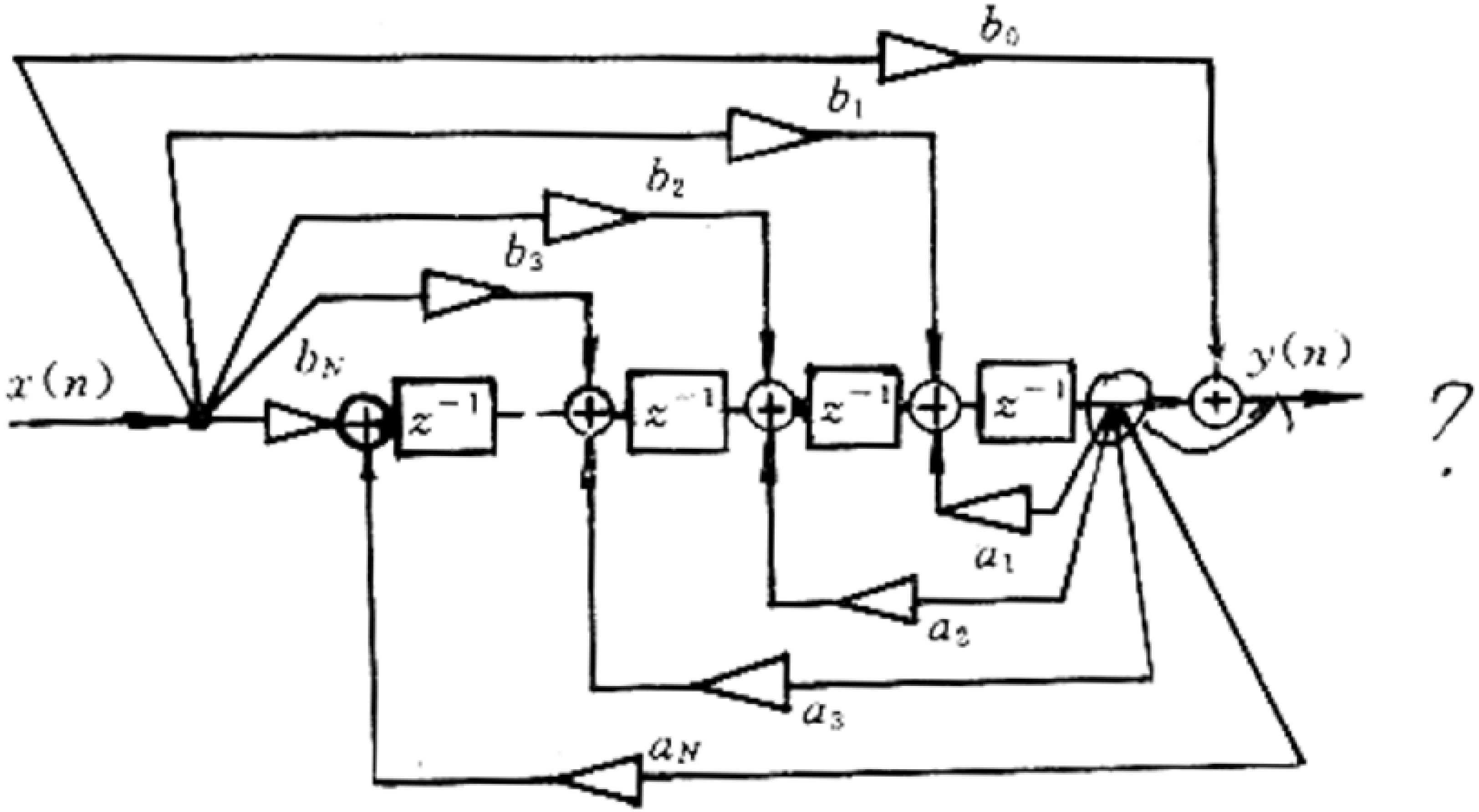


图 5－5　转置的直接型Ⅱ结构

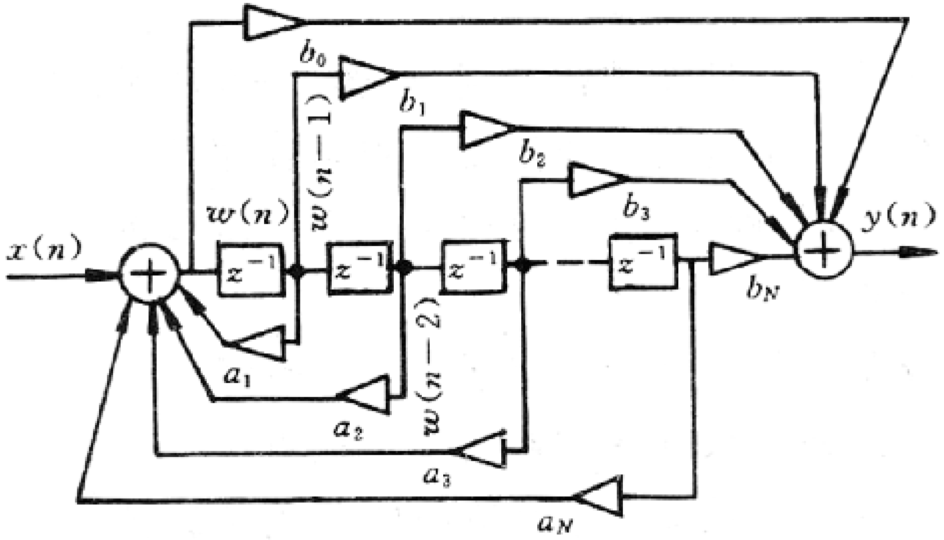


图 5—4　直接型Ⅱ结构方框图

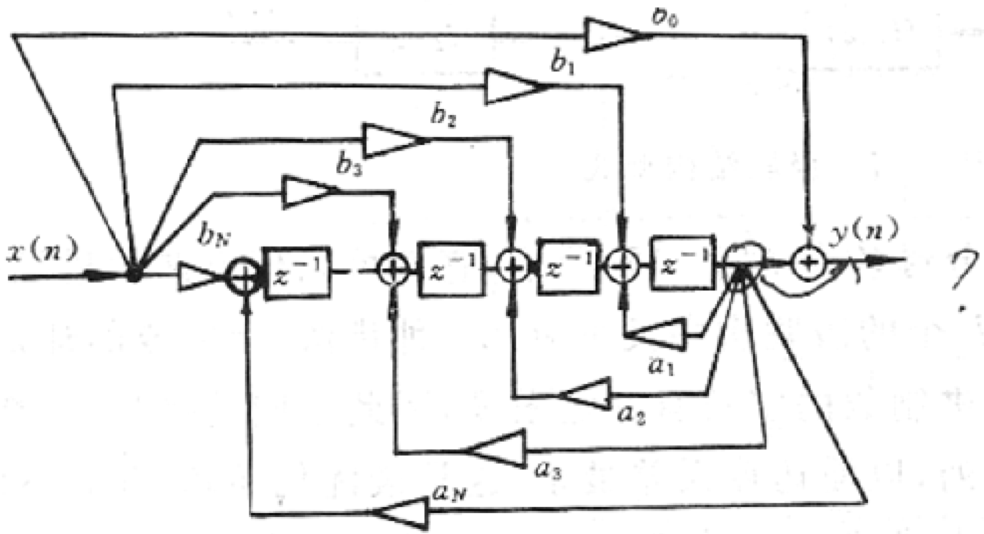
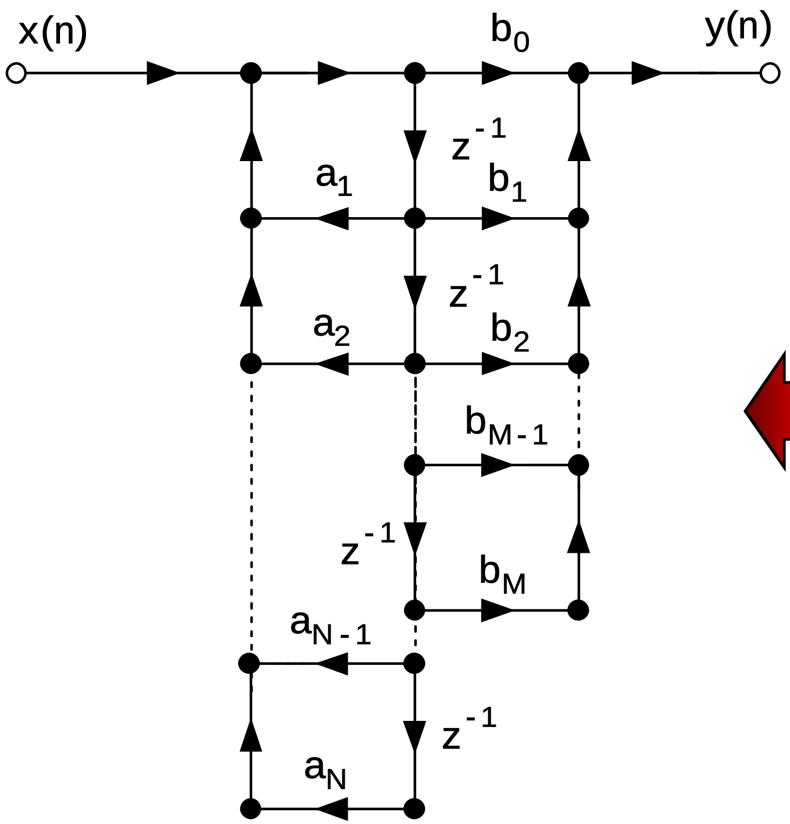
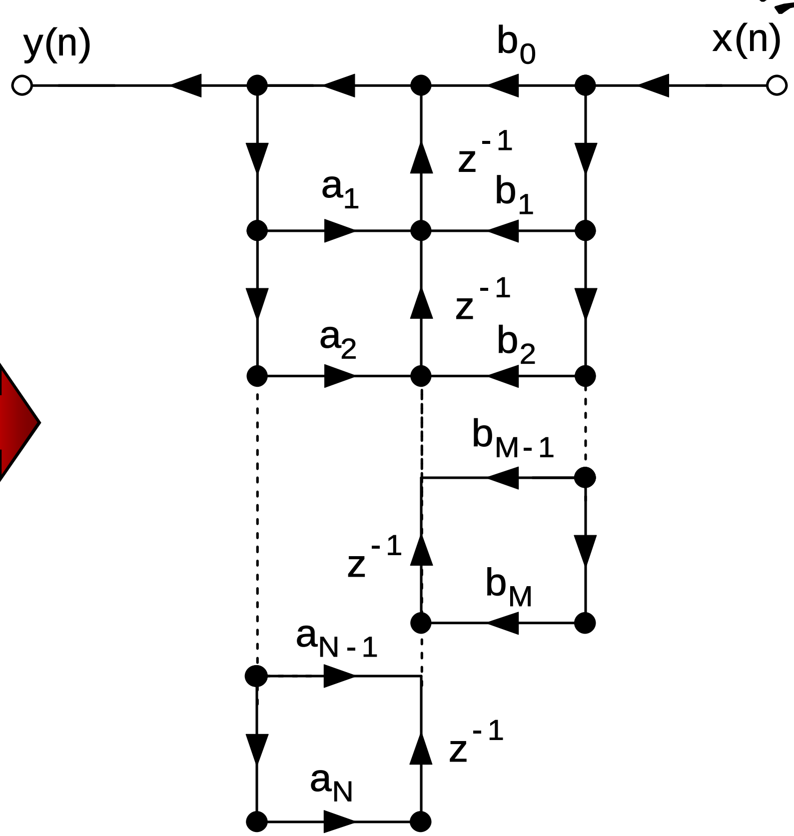


图 5—5　转置的直接型Ⅱ结构

转置定理-针对流图

原网络中所有支路方向倒转，并将输入$x(n)$和输出$y(n)$相互交换，则其系统函数$H(z)$不改变





直接型的优点：

简单、直观

直接型的共同缺点：

- 系数 a_k，b_k 与零极点关系不直接，不易控制和调整滤波器的性能
- 极点对系数（零极点位置）的变化过于灵敏，易出现不稳定或较大误差
- 运算的累积误差较大

Very sensitive to the effects of coefficients quantization if N or M are large !!!

4、级联型：Cascade

将系统函数按零极点因式分解:

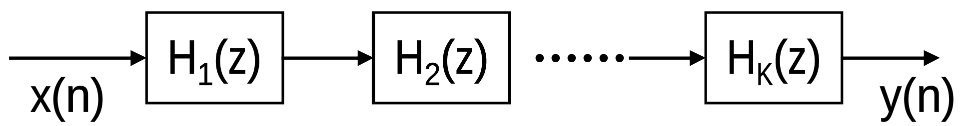
$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-p_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1-q_k z^{-1})(1-q_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}$$

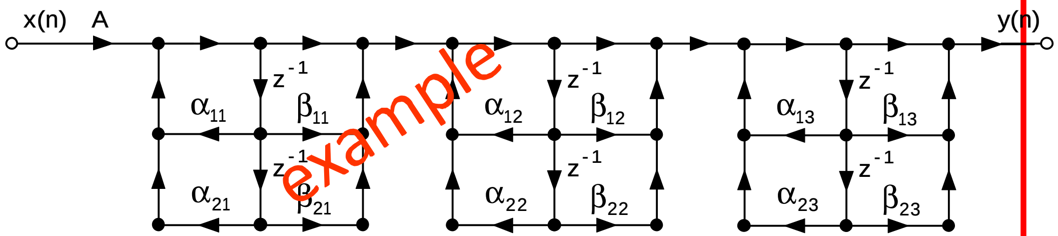
$$\begin{cases} A \text{ 为常数}, M = M_1 + 2M_2 \quad N = N_1 + 2N_2 \\ p_k \text{ 和 } c_k \text{ 分别为实数零、极点} \\ q_k, q_k^* \text{ 和 } d_k, d_k^* \text{ 分别为复共轭零、极点} \end{cases}$$

cascade of biquads

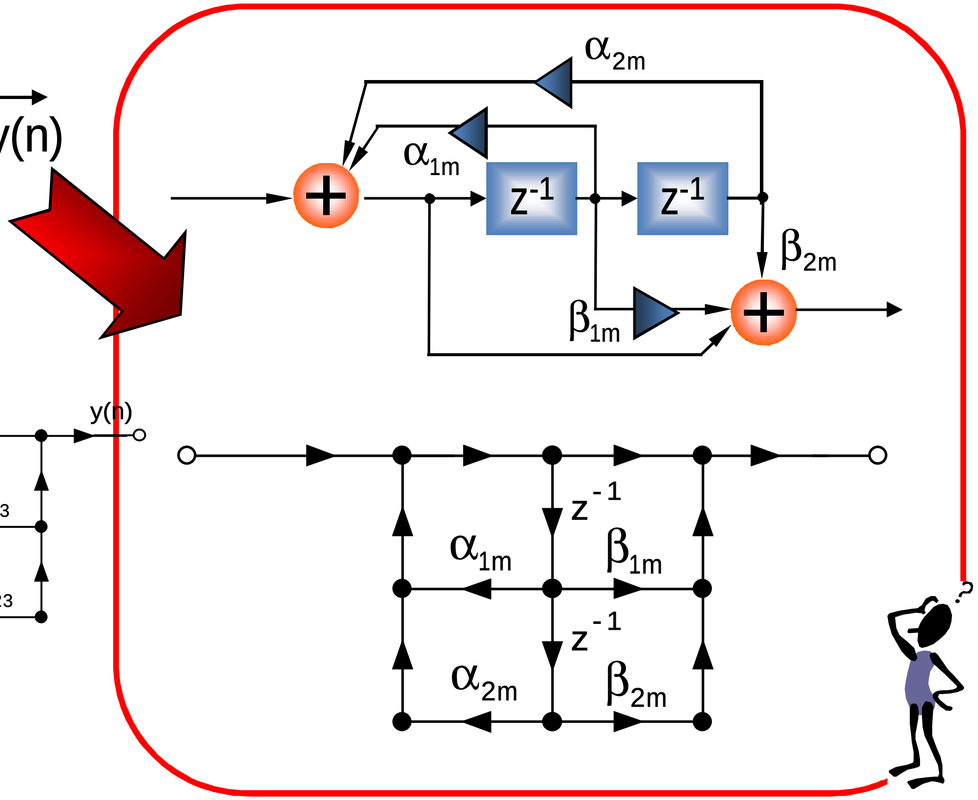
将共轭成对的复数组合成二阶多项式（系数为实数），为采用相同结构的子网络，将两个实零点/极点组合成二阶多项式，得到：

$$H(z)=A\left(\prod_{k}^{L}\left[\frac{1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2}}\right]\right)=A\left(\prod_{k}^{L}H_k(z)\right)\qquad L=\left\lfloor\frac{N+1}{2}\right\rfloor$$





组合优化



3、级联型

4、级联型：Cascade

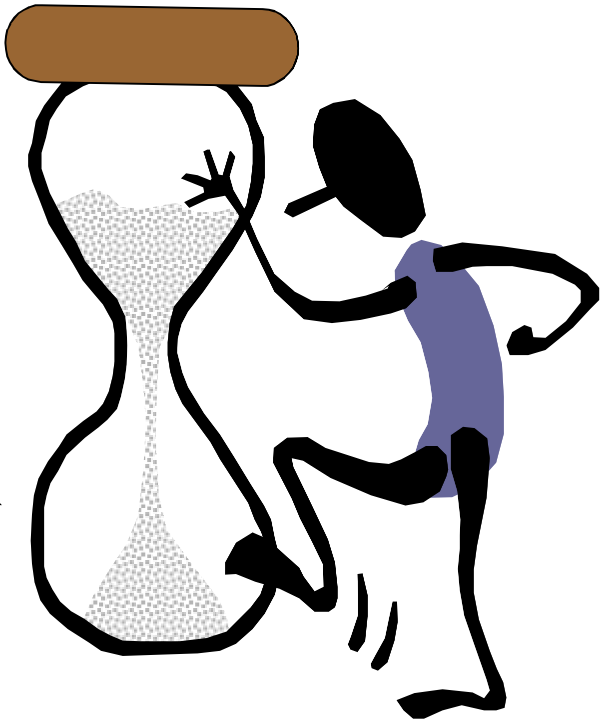
特点：

- 调整系数 β_{1k} ，β_{2k} 能单独调整滤波器的第k对零点，而不影响其它零极点

  调整系数 α_{1k}，α_{2k} 能单独调整滤波器的第k对极点，而不影响其它零极点

  滤波器频率响应性能调整方便

- 所需存储单元少，可实现时分复用
- 组合方式多



缺点：存在误差传递（放大/缩小） 产生溢出
串行处理 运算效率不高

5、并联型：Parallel

将$H(z)$展成部分分式之和：

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M-N}G_kz^{-k}+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-g_kz^{-1}}+\sum_{k=1}^{N_2}\frac{\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2}}$$

$$N=N_1+2N_2$$

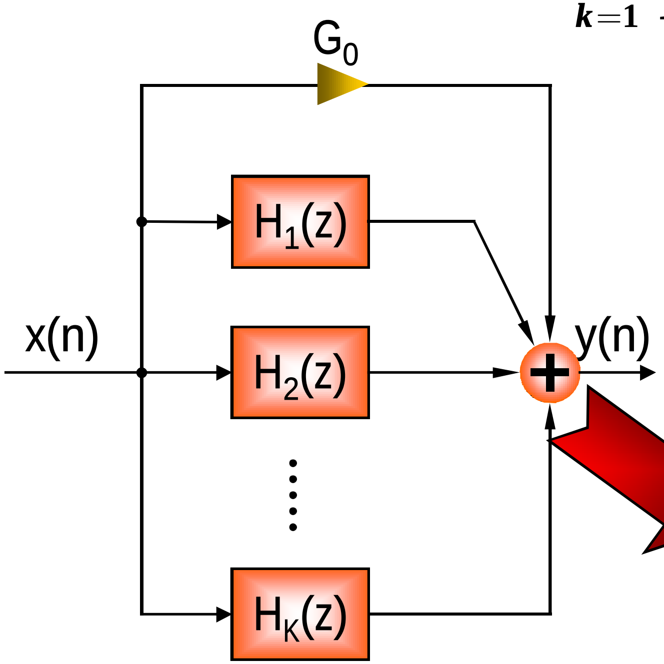
其中 $G_k, A_k, g_k, \beta_{0k}, \beta_{1k}, \alpha_{1k}, \alpha_{2k}$ 均为实数

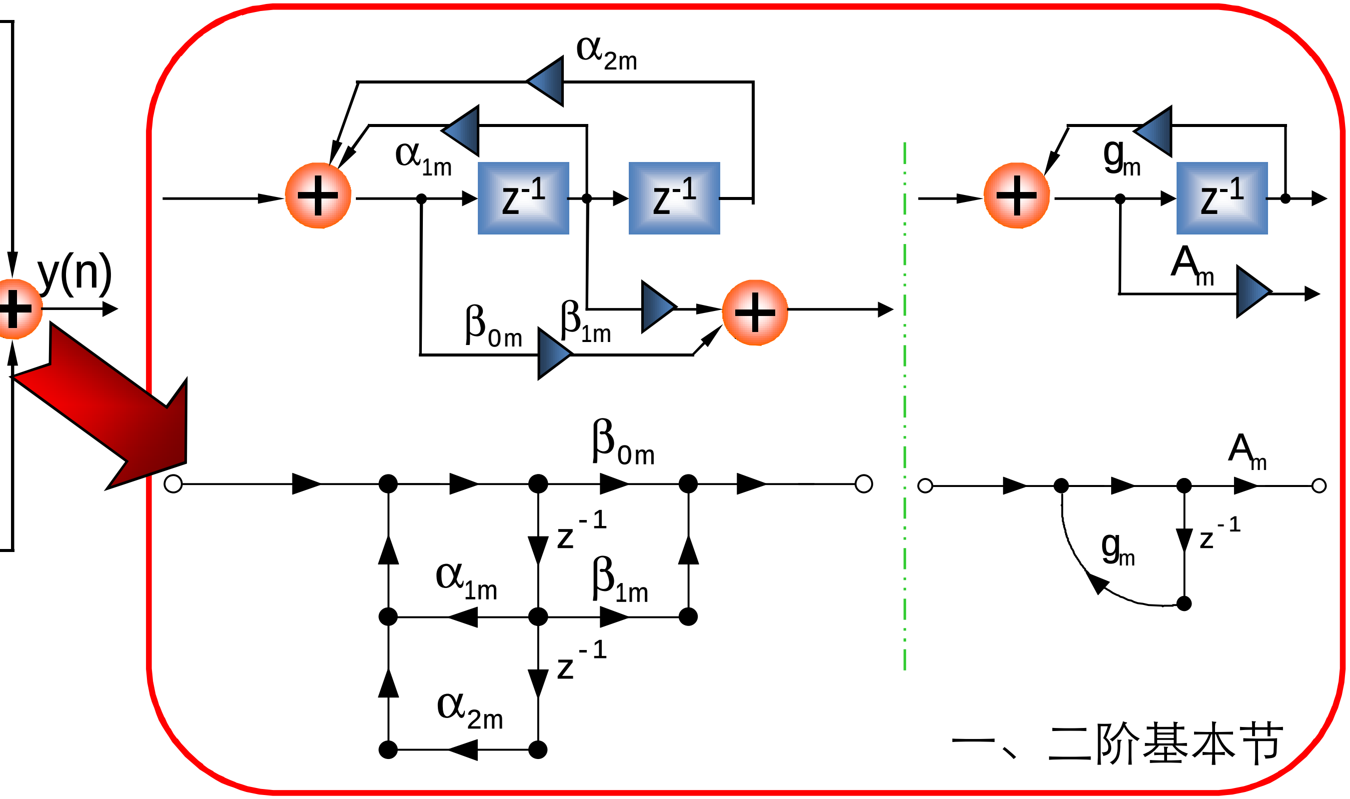
(1) $M<N$ ： $\sum_{k=0}^{M-N}G_kz^{-k}$ 消失

(2) $M=N$ ： $\sum_{k=0}^{M-N}G_kz^{-k}\rightarrow G_0$

5、并联型：Parallel

$$H(z)=G_0+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-g_kz^{-1}}+\sum_{k=1}^{N_2}\frac{\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2}}\qquad(M=N)$$





并联型的特点:

- 通过调整系数 α_{1k}，α_{2k} 可单独调整一对极点位置，但不能单独调整零点位置
- 各并联基本节的误差互相不影响，故运算误差最小
- 可进行并行运算，运算速度高

例：设IIR数字滤波器差分方程为：

$$y(n)=8x(n)-4x(n-1)+11x(n-2)-2x(n-3)$$
$$+\frac{5}{4}y(n-1)-\frac{3}{4}y(n-2)+\frac{1}{8}y(n-3)$$

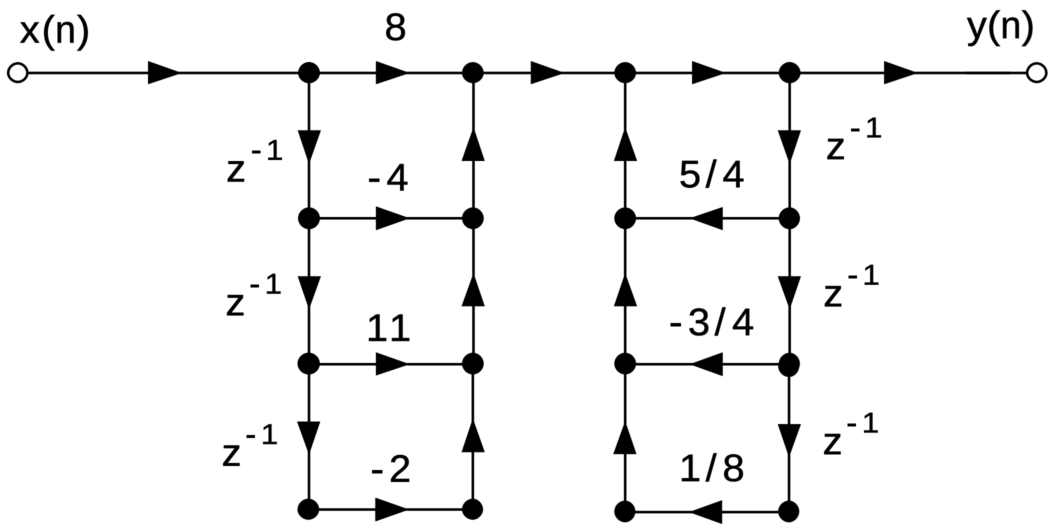
试用四种基本结构实现此差分方程。

解：对差分方程两边取 z 变换，得系统函数：

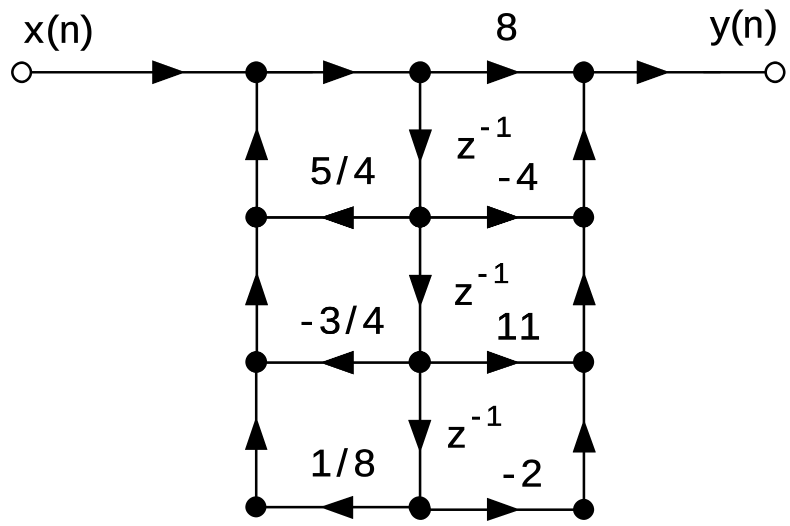
$$H(z)=\frac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}}$$

$$H(z)=\frac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}}=\frac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-\left(\frac{5}{4}z^{-1}-\frac{3}{4}z^{-2}+\frac{1}{8}z^{-3}\right)}$$

直接 I 型结构:



典范型结构:

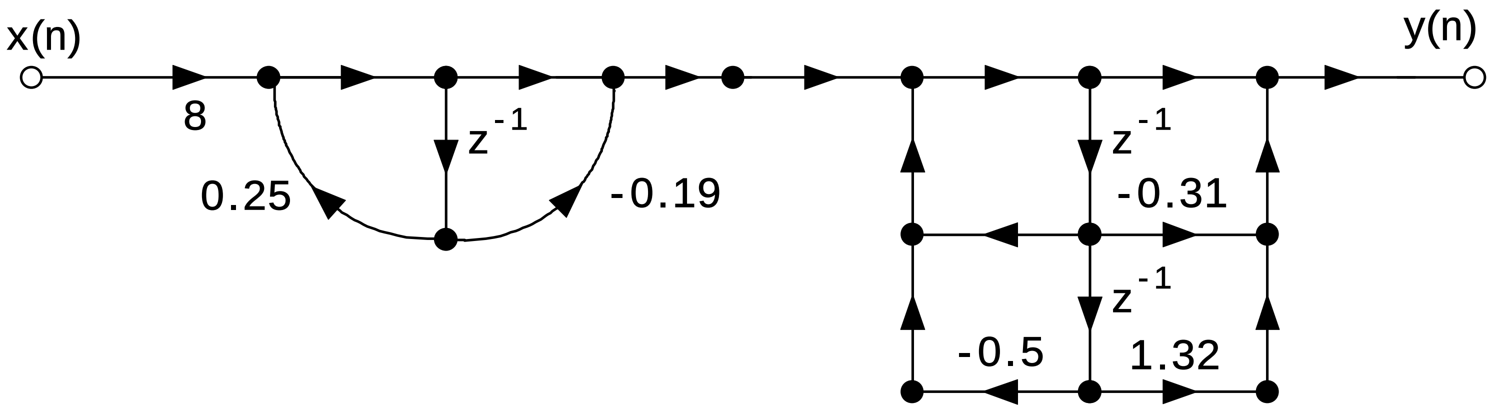


将 $H(z)$ 因式分解：

$$H(z)=\frac{\left(2-0.379z^{-1}\right)\left(4-1.24z^{-1}+5.264z^{-2}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

$$=(8)\left(\frac{1-0.19z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)\left(\frac{1-0.31z^{-1}+1.32z^{-2}}{1-\left(z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}\right)}\right)$$

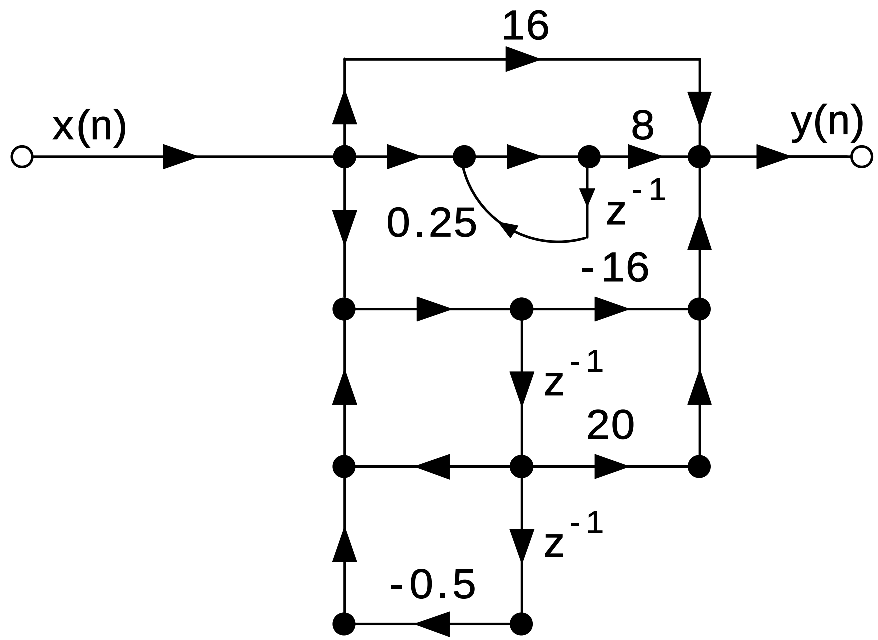
得级联型结构：



将 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z})$ 部分分式分解:

$$\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{z}\right)=\mathbf{16}+\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{z}^{-1}}+\frac{-\mathbf{16}+\mathbf{20}\boldsymbol{z}^{-1}}{\mathbf{1}-\left(\boldsymbol{z}^{-1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{z}^{-2}\right)}$$

得并联型结构:



§5-2 数字滤波器的结构

FIR 数字滤波器的结构

FIR数字滤波器的特点：

系统函数：$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

差分方程：$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)x(n-k)=h(n)*x(n)$$

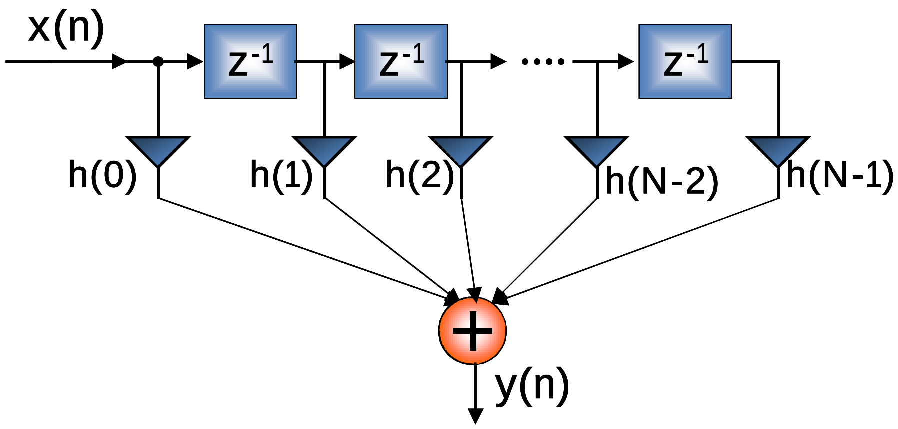
1）系统的单位抽样响应$h(n)$有限长（N点）

2）系统函数$H(z)$在 $|z|>0$ 处收敛，有限z平面只有零点，全部极点在 $z=0$ 处（因果系统）

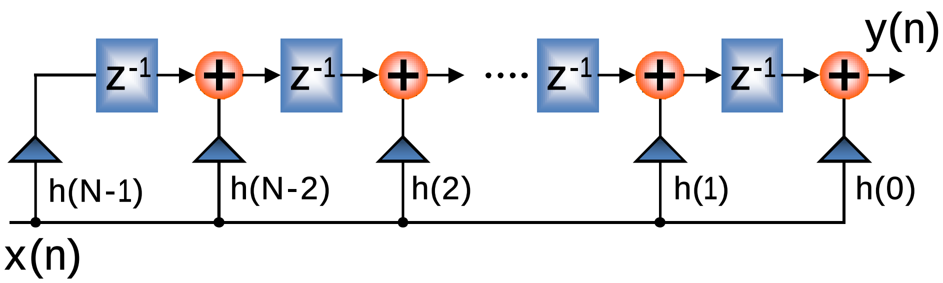
3）无输出到输入的反馈，一般为非递归型结构

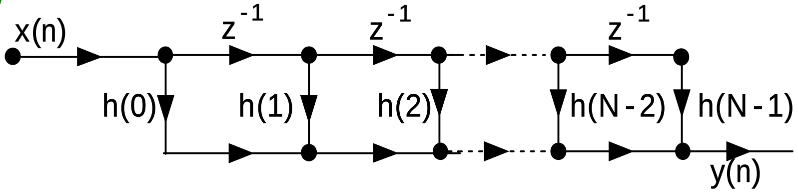
1、直接型 (卷积型)

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

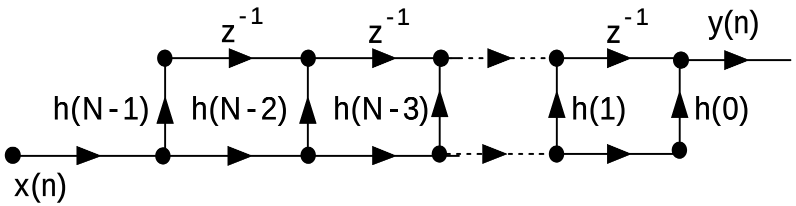


转置型





- § Tapped-delay line（N-1）delays
- § N multipliers
- § 1 adder（N inputs）



2、级联型

当需要灵活方便地控制滤波器的传输零点时，可将$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z})$分解成实系数二阶因式的乘积形式:

$$H(z)=\prod_{k=1}^{M_1}H_{1k}(z)\prod_{k=1}^{M_2}H_{2k}(z)$$

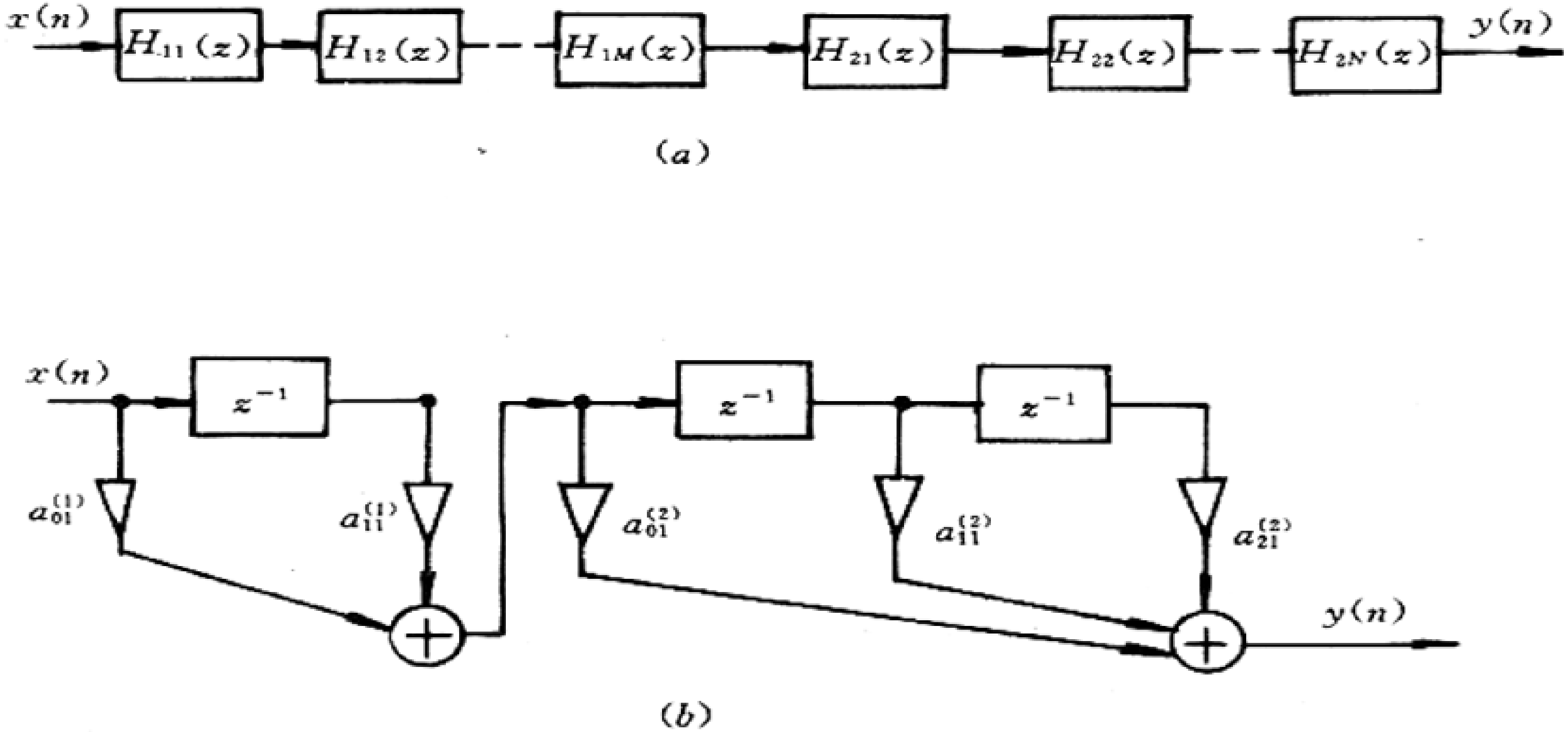
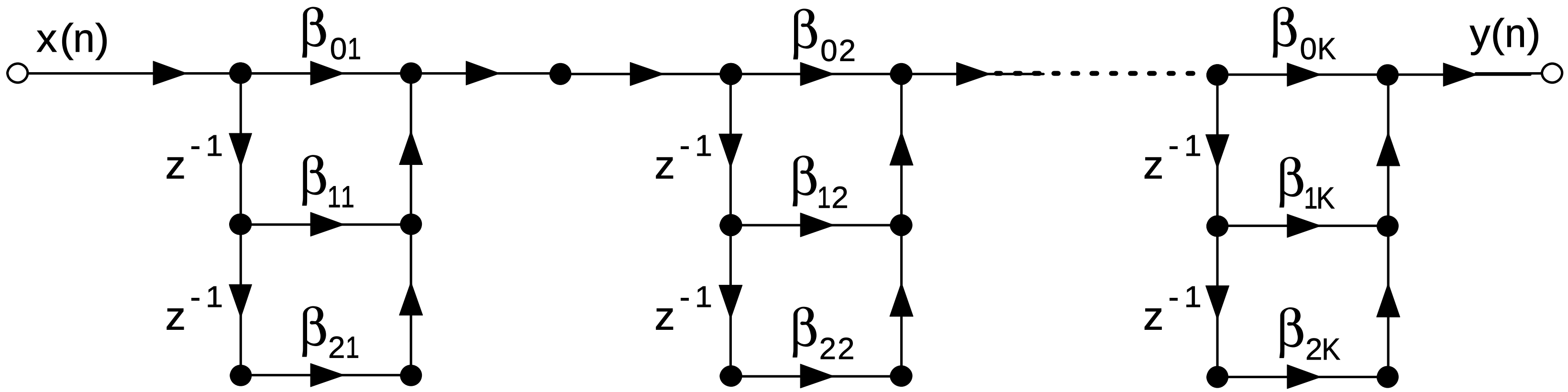


图 5—12 FIR 级联型结构之构成

(a) 级联型结构框图 (b) 级联型具体结构

2、级联型

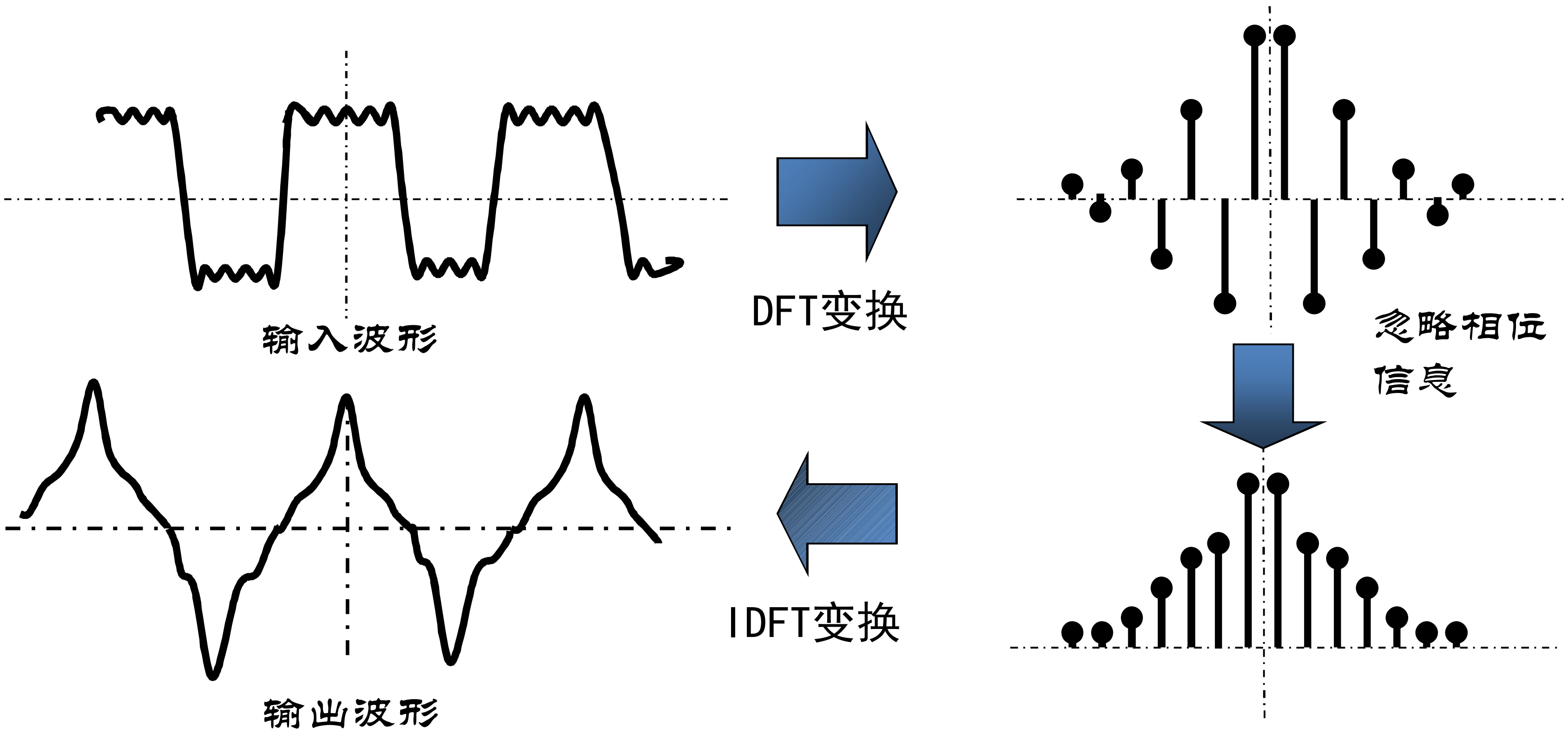
$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\prod_{k=1}^{[N/2]}(\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2})$$



- 由于这种结构所需的系数比直接型多，所需乘法运算也比直接型多，很少用
- 由于这种结构的每一节控制一对零点，因而通常仅在需要控制传输零点时用

3、线性相位FIR滤波器结构

为什么要求滤波器具有线性相位响应？



忽略相位信息的后果

通信系统：数据通信、调制解调器

希尔伯特变换器：要求输入输出信号正交

高保真音响系统：音乐的相位失真必须减到最小，尽可能逼真地重现原来的声音

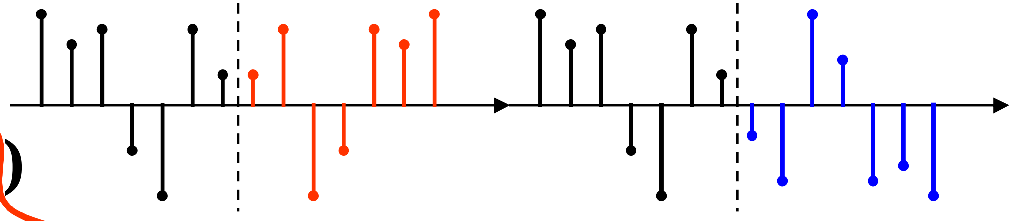
理想微分器：……

3、线性相位FIR滤波器结构

FIR滤波器单位抽样响应$h(n)$为实数，$0 \le n \le N-1$，且满足：

偶对称：$h(n) = h(N-1-n)$

奇对称：$h(n) = -h(N-1-n)$



即对称中心在 $(N-1)/2$ 处，则这种 FIR 滤波器具有严格线性相位

N 为奇数时

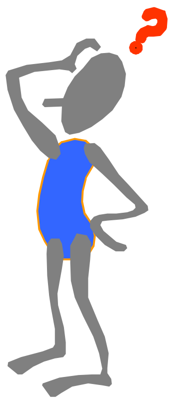
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)\left[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)}\right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}}$$

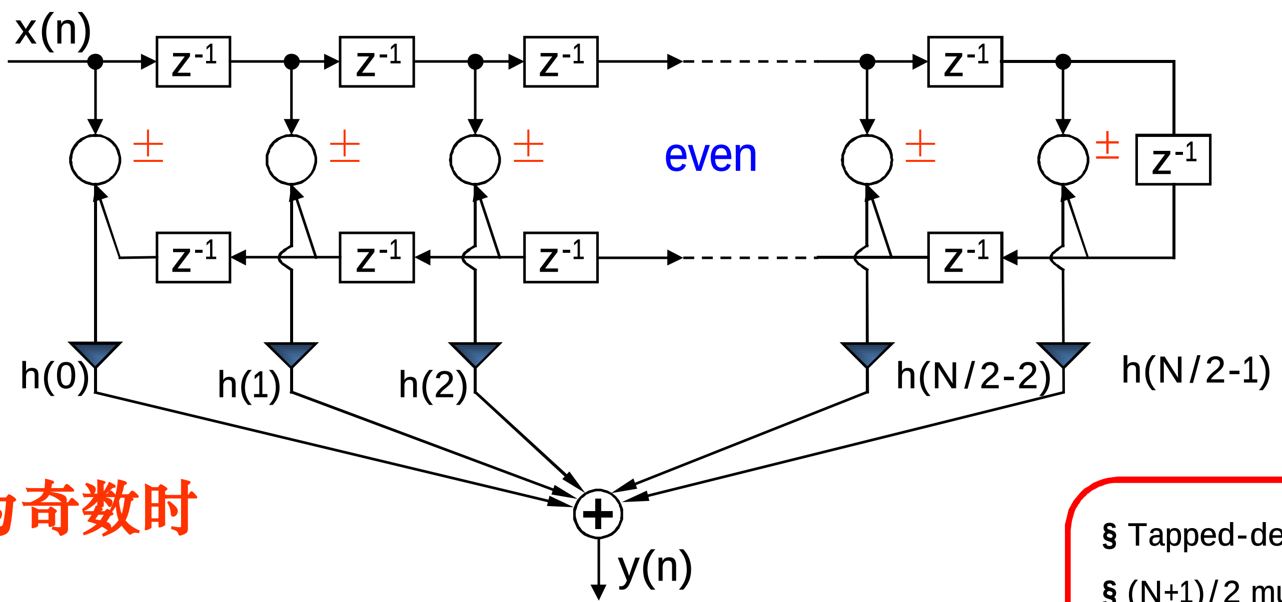
N 为偶数时

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) z^{-n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

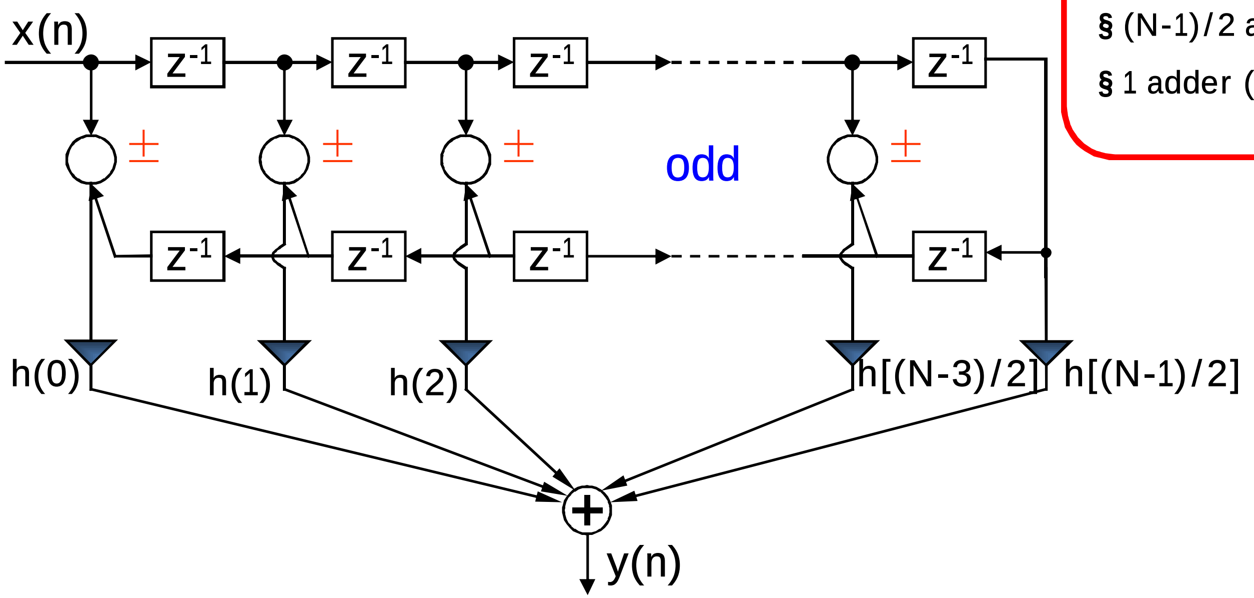
$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)\left[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)}\right]$$



N 为偶数时



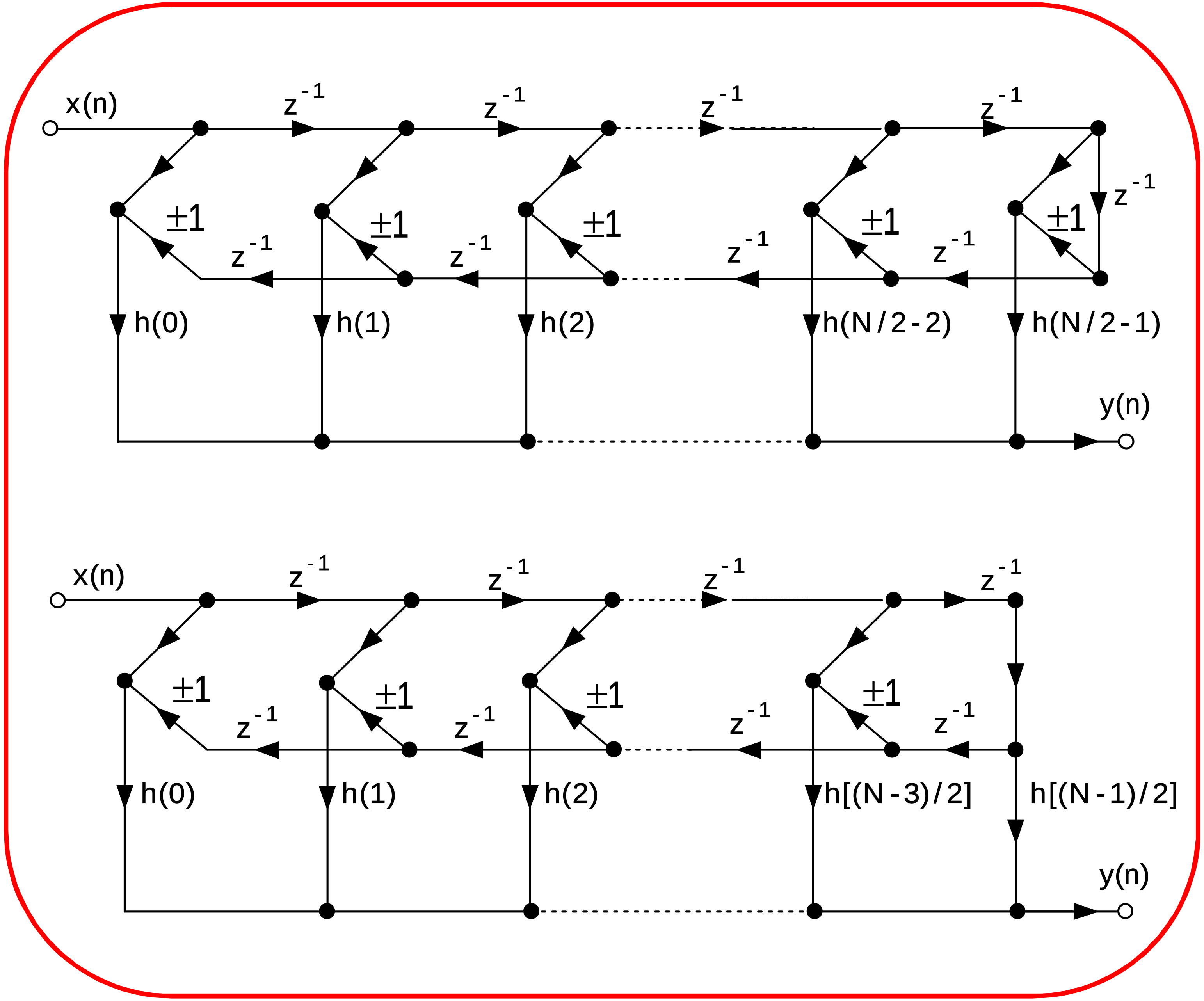
N 为奇数时



- § Tapped-delay line (N-1) delays
- § (N+1)/2 multipliers
- § (N-1)/2 adders (2 inputs)
- § 1 adder (N+1)/2 inputs

symmetric FIR

h(n) 偶对称，取 “+” —— h(n) 奇对称，取 “-” ，且 $h\left(\frac{N-1}{2}\right)=0$



x(n)
z - 1
±1
h(0)
h(1)
h(2)
h(N / 2 - 2)
h(N / 2 - 1)
y(n)
h[(N - 3) / 2]
h[(N - 1) / 2]

4、频率取样型

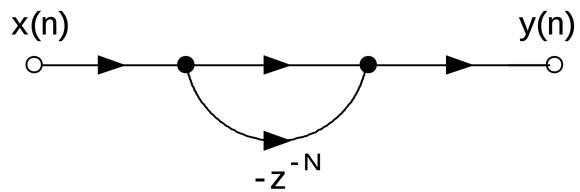
N个频率抽样$H(k)$恢复$H(z)$的内插公式：

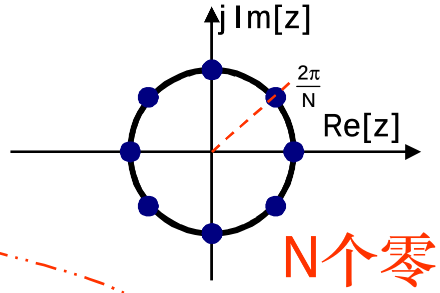
$$H(z)=(1-z^{-N})\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

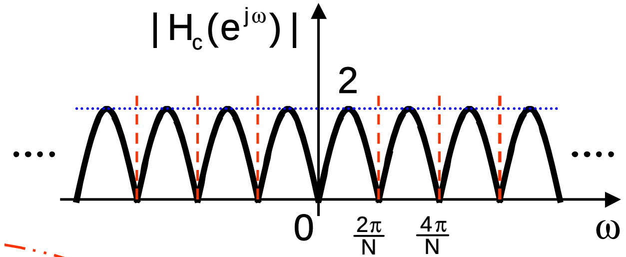
$$=\frac{1}{N}H_c(z)\sum_{k=0}^{N-1}H_k(z)$$

由此得到FIR滤波器的另一种结构：频率抽样型结构，它由两部分级联而成：

（1）梳状滤波器：$H_c(z)=(1-z^{-N})$







$$H_c(e^{j\omega})=1-e^{-j\omega N}$$

$$=e^{-j\frac{\omega N}{2}}\left(e^{j\frac{\omega N}{2}}-e^{-j\frac{\omega N}{2}}\right)=2je^{-j\frac{\omega N}{2}}\sin\frac{\omega N}{2}$$

（2）N个谐振器： $$\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

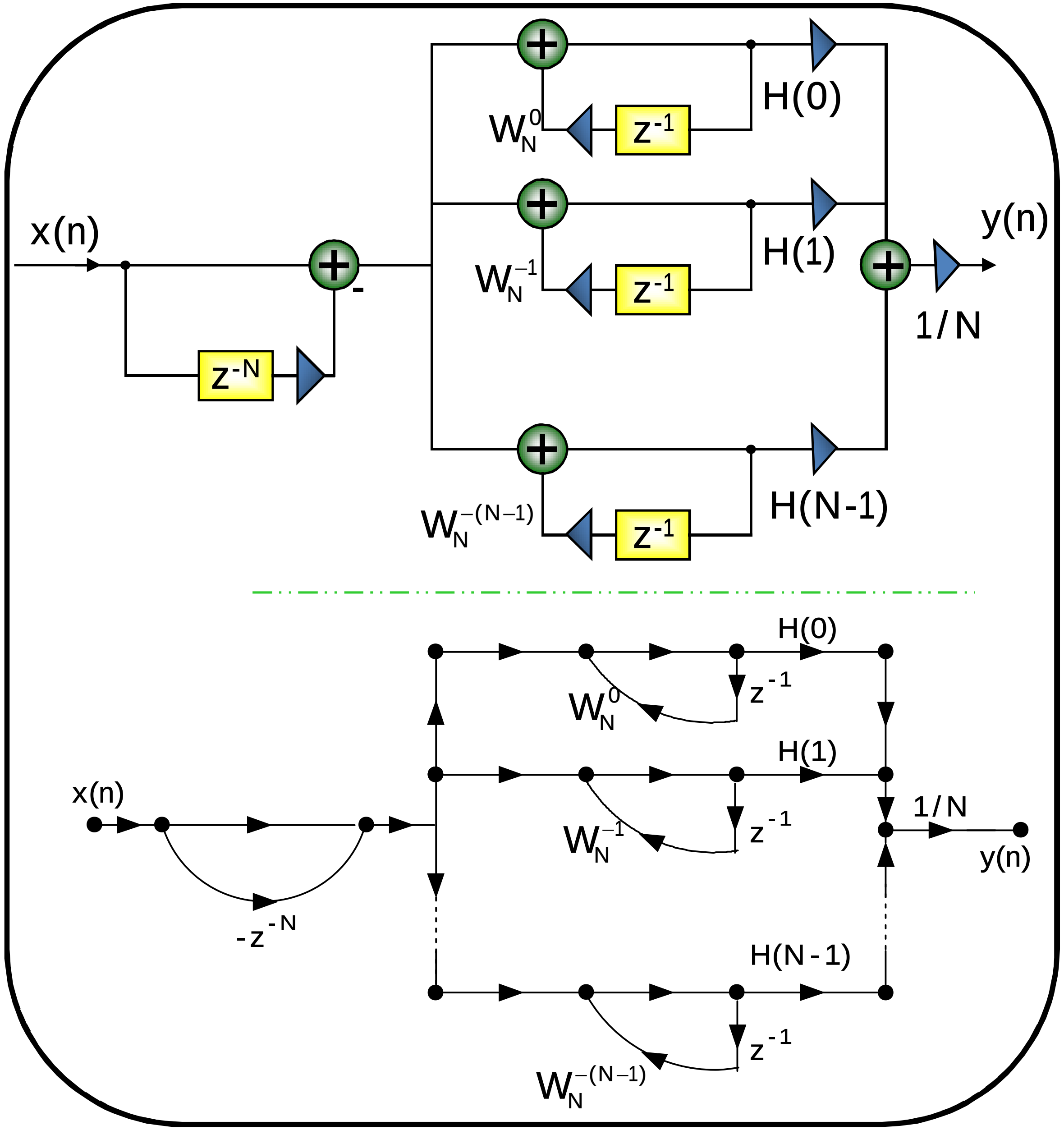
第 k 个谐振器

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

为一1阶网络，它存在一个位于$z = W_N^{-k}$ 的极点，并在该处发生所谓谐振，即 $H_k(z) \to \infty$，而该极点正好与梳状滤波器的第k个零点相抵消，从而使这个频率上的频率响应等于$H(k)$：

$$H_c(z) \cdot H_k(z) = \left(z_k - e^{j\frac{2\pi k}{N}} \right) \left[\frac{H(k)}{\left(z_k - e^{j\frac{2\pi k}{N}} \right)} \right] = H(k)$$

将两部分级联起来，便得到所谓的频率抽样结构



J
- 调整H(k)就可以有效地调整频响特性（在频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 处的响应即为H(k)

J
- 若h(n)长度相同，则除了各支路增益H(k)外网络结构完全相同，便于标准化、模块化

L
- 有限字长效应可能导致零极点不能完全对消(梳状滤波器的零点由延时器形成，并不受量化误差影响)，导致系统不稳定

L
- 系数多为复数，增加了复数乘法和存储量

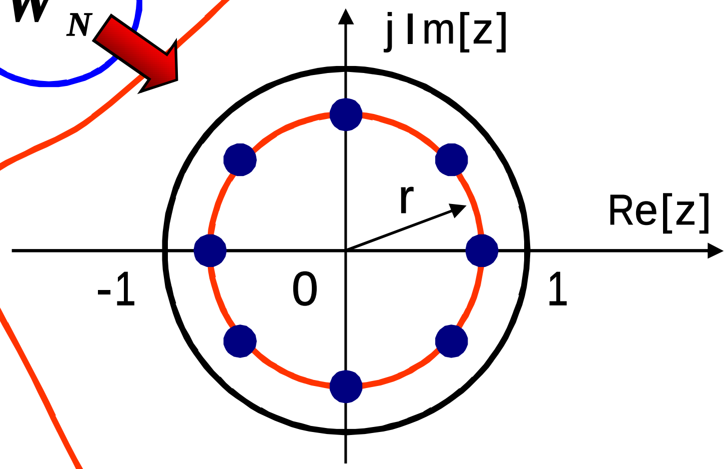
4、修正之频率取样型

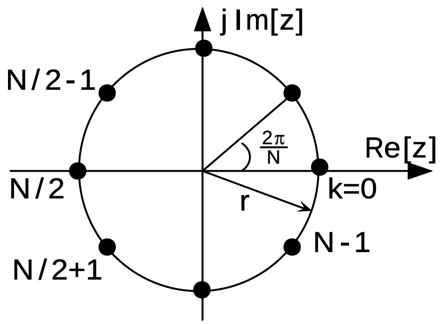
将零极点移至半径为 r 的圆上：$r < 1, r \approx 1$

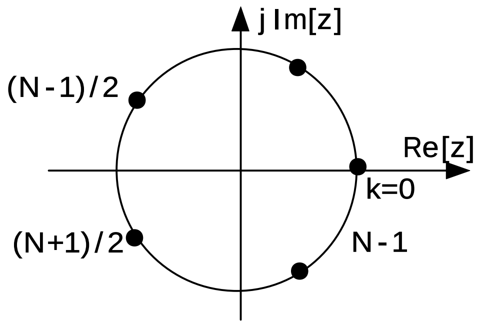
$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_r(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}}$$

此时，第k个谐振器的极点变为 $r W_N^{-k}$

为了使系数是实数，可将共轭根合并，这些共轭根在半径为r的圆周上以实轴成对称分布：





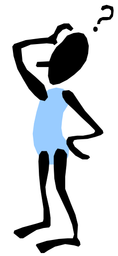


由对称性：$z_{N-k} = z_k^*$ $\quad W_N^{-(N-k)} = W_N^k = (W_N^{-k})^*$

又$h(n)$为实数，则 $H(k) = H^*((N-k))_N R_N(k)$ $\quad \boxed{H(k) = H^*(N-k)}$

将第k个和第$(N-k)$个谐振器合并成一个实系数的二阶网络：

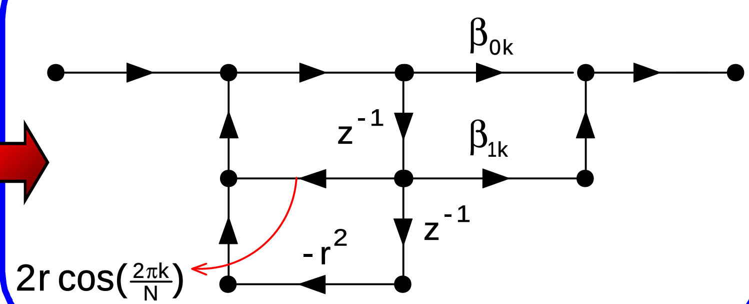
$$H_k(z)=\frac{H(k)}{1-rW_N^{-k}z^{-1}}+\frac{H(N-k)}{1-rW_N^{-(N-k)}z^{-1}}$$
$$=\frac{H(k)}{1-rW_N^{-k}z^{-1}}+\frac{H^*(k)}{1-r(W_N^{-k})^*z^{-1}}$$
$$=\frac{\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}}{1-z^{-1}2r\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)+r^2z^{-2}}$$



其中 $\beta_{0k}=2\mathrm{Re}[H(k)];\ \beta_{1k}=-2r\,\mathrm{Re}[H(k)W_N^k]$ $\begin{cases} k=1,2,\ldots,\frac{N-1}{2}, N:odd \\ k=1,2,\ldots,\frac{N}{2}-1, N:even \end{cases}$

remarks

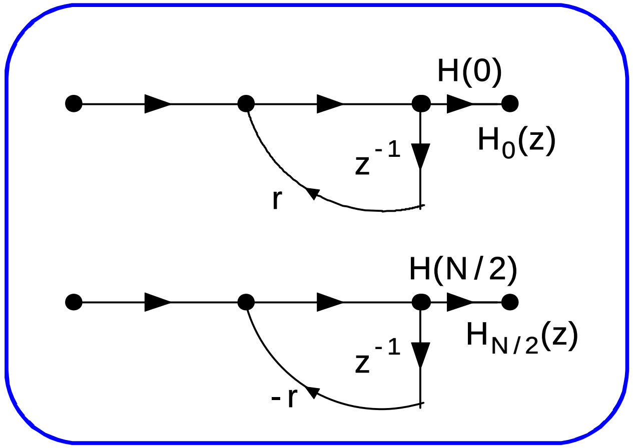
第k和第N-k个谐振器合并为一个二阶网络的极点在单位圆内，而不是在单位圆上，因而从频率响应的几何解释可知，它相当于一个有限Q(品质因数)的谐振器。其谐振频率为：W_N^{-k}



- 当 N 为偶数时，还有一对实数根，分别在 $k = 0, N/2$ 两点

$$H_0(z) = \frac{H(0)}{1 - rz^{-1}}$$

$$H_{N/2}(z) = \frac{H(N/2)}{1 + rz^{-1}}$$

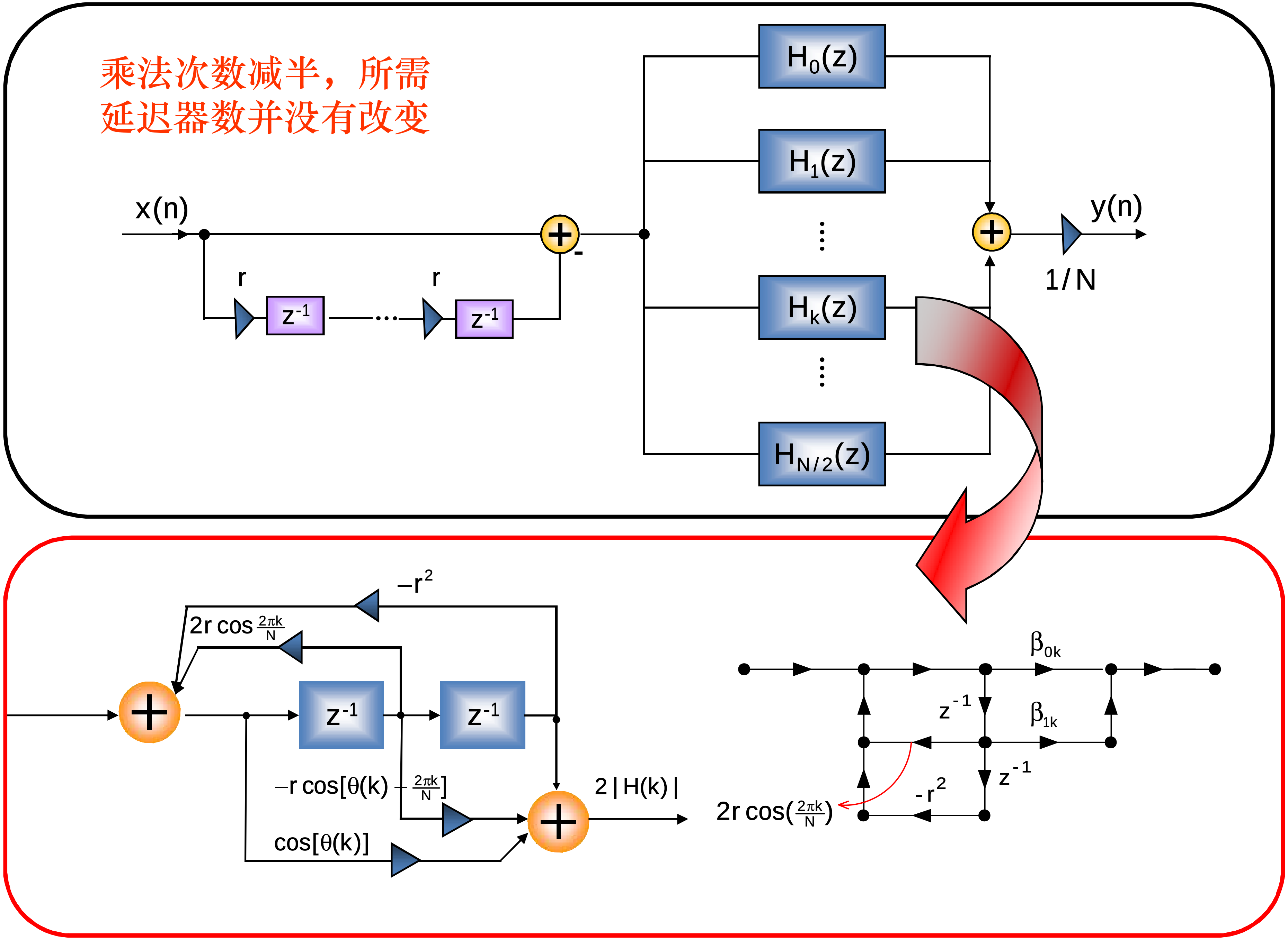


$$H(z) = \left(1 - r^N z^{-N}\right)\frac{1}{N}\left[H_0(z) + H_{N/2}(z) + \sum_{k=1}^{N/2-1} H_k(z)\right]$$

- 当 N 为奇数时，只有一个实数根，在 $k = 0$ 处

$$H(z) = \left(1 - r^N z^{-N}\right)\frac{1}{N}\left[H_0(z) + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H_k(z)\right]$$

乘法次数减半，所需
延迟器数并没有改变



修正频率采样结构的特点

（1）结构有递归部分—N个谐振器；又有非递归部分--梳状滤波器；

（2）它的零、极点数目只取决于单位抽样响应的长度，因而单位抽样响应长度相同，利用同一梳状滤波器、同一结构而只有加权系数$\beta_{0k},\beta_{1k},\boldsymbol{H}(0),\boldsymbol{H}(\boldsymbol{N}/2)$不同的谐振器，就能得到各种不同的滤波器；

（3）其结构可以高度模块化，可时分复用；

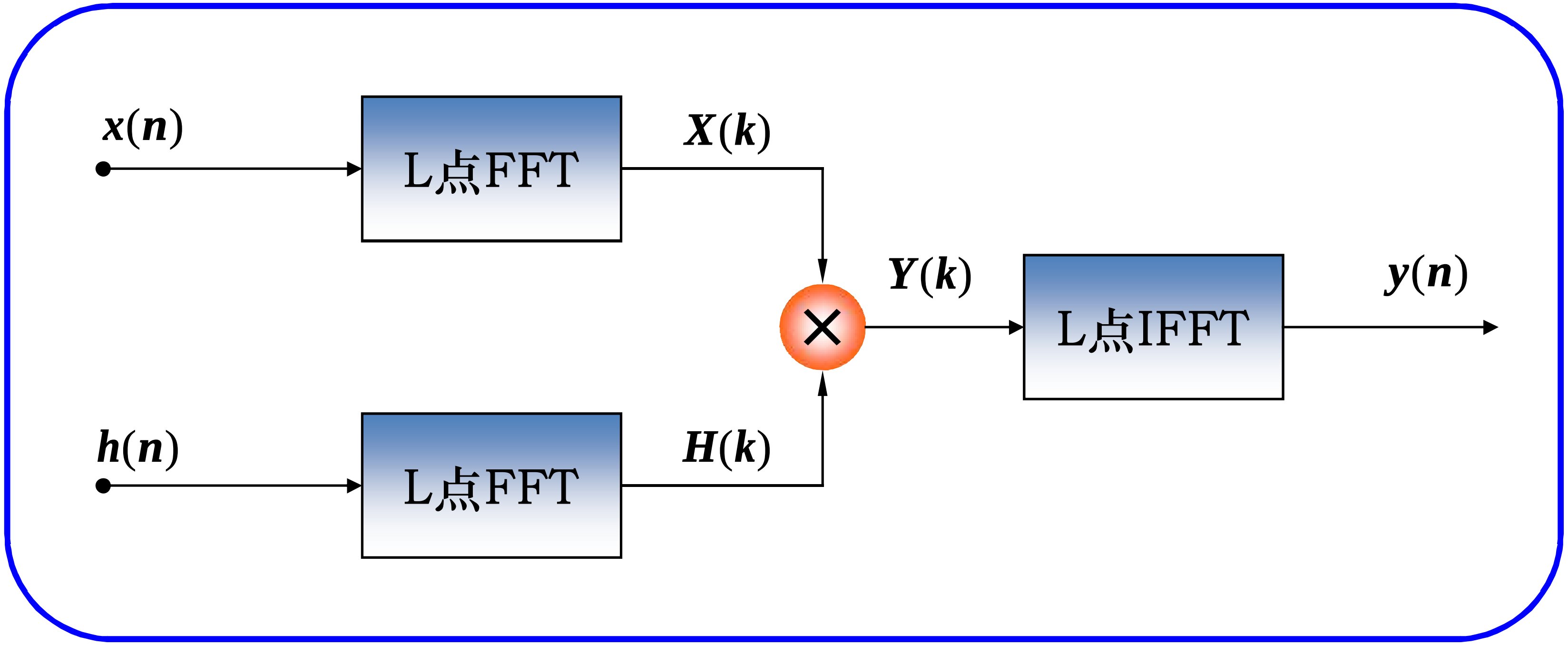
修正频率采样结构的应用范围

（1）如果多数频率特性的采样值$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})$为零，例：窄带低通情况下，这时谐振器减少，因而可以比直接型少用乘法器，但存储器还是比直接型多用一些；

（2）可以共同使用多个并列的滤波器。例：信号频谱分析中，要求同时将信号的各种频率分量分别滤出来，这时可采用频率采样结构的滤波器，大家共用一个梳状滤波器及N个谐振器，只是将各谐振器的输出适当加权组合就能组成各所需的滤波器。这样的结构具有很大的经济性；

（3）常用于窄带滤波，不适于宽带滤波。

5、快速卷积结构



$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)x(n-k)$$

$$Y(k)=X(k)H(k)\Rightarrow y(n)=\mathrm{IDFT}[Y(k)]$$