数字信号处理

周治国

2015.10

第四章 快速傅里叶变换

§4-6 分裂基FFT算法

一、背景

对更快速算法的需求

$$基-2\ FFT \sim \frac{N}{2}\log_2^N$$

$$\downarrow$$

1984年，杜梅尔（P.Douhamel）

霍尔曼（H.Hollman）

基-2 FFT

基-4 FFT

$$\longrightarrow 分裂基\ FFT \sim \frac{N}{3}\log_2^N$$

§4-6 分裂基FFT算法

基4-DIF FFT算法

$$\forall\, x(n), \qquad 0 \le n \le N-1, N = 2^n$$

DFT[x(n)] → 更快的FFT算法

设 ***N=Pq, P=N/4, q=4***

令 $n=Pn_1+n_0= N/4\, n_1+n_0$; $0 \le n_1 \le 3$, $0 \le n_0 \le (N/4)-1$

$k=4k_1+k_0$; $0 \le k_1 \le (N/4)-1$, $0 \le k_0 \le 3$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

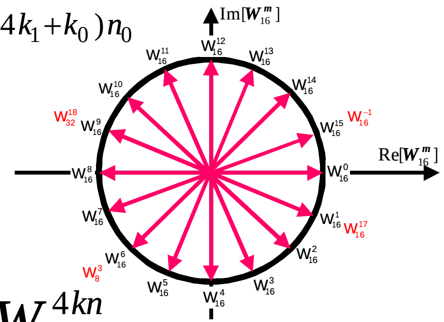
$$= \sum_{n_0=0}^{N/4-1} \sum_{n_1=0}^{3} x(\frac{N}{4}n_1 + n_0) W_N^{k(\frac{N}{4}n_1+n_0)}$$

$$= \sum_{n_0=0}^{N/4-1} \left[x(n_0)W_4^0 + x(n_0+\frac{N}{4})W_4^k + x(n_0+\frac{N}{2})W_4^{2k} + x(n_0+\frac{3N}{4})W_4^{3k} \right] W_N^{kn_0}$$

$$X(k)=X(4k_1+k_0) \qquad k_0=0,1,2,3 \qquad (k_1\to k, n_0\to n)$$

$$=\sum_{n_0=0}^{N/4-1}\left[x(n_0)+x(n_0+\frac{N}{4})W_4^{(4k_1+k_0)}+x(n_0+\frac{N}{2})W_4^{2(4k_1+k_0)}+x(n_0+\frac{3N}{4})W_4^{3(4k_1+k_0)}\right]W_N^{(4k_1+k_0)n_0}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{N/4-1}\left[x(n_0)+x(n_0+\frac{N}{4})W_4^{k_0}+x(n_0+\frac{N}{2})W_4^{2k_0}+x(n_0+\frac{3N}{4})W_4^{3k_0}\right]W_N^{(4k_1+k_0)n_0}$$



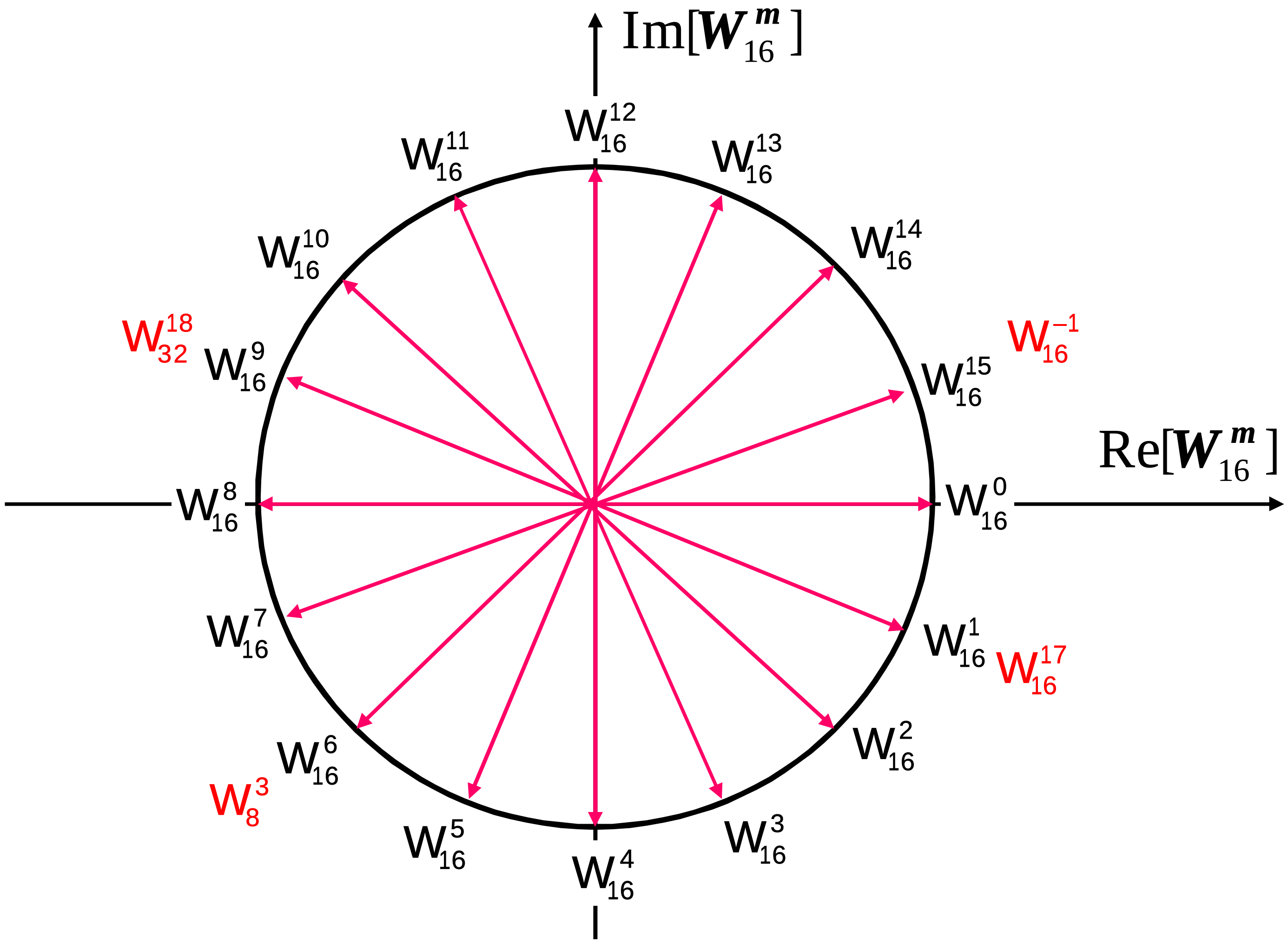
在$k_0=0,1,2,3$时，用k表示k_1，n表示n_0

$$\begin{cases}X(4k)=\sum_{n=0}^{N/4-1}\left[x(n)+x(n+\frac{N}{4})+x(n+\frac{N}{2})+x(n+\frac{3N}{4})\right]W_N^{4kn}\\ X(4k+1)=\sum_{n=0}^{N/4-1}\left[x(n)-jx(n+\frac{N}{4})-x(n+\frac{N}{2})+jx(n+\frac{3N}{4})\right]W_N^{4kn+n}\\ X(4k+2)=\sum_{n=0}^{N/4-1}\left[x(n)-x(n+\frac{N}{4})+x(n+\frac{N}{2})-x(n+\frac{3N}{4})\right]W_N^{4kn+2n}\\ X(4k+3)=\sum_{n=0}^{N/4-1}\left[x(n)+jx(n+\frac{N}{4})-x(n+\frac{N}{2})-jx(n+\frac{3N}{4})\right]W_N^{4kn+3n}\end{cases}$$

$\downarrow$

基4-*DIF*

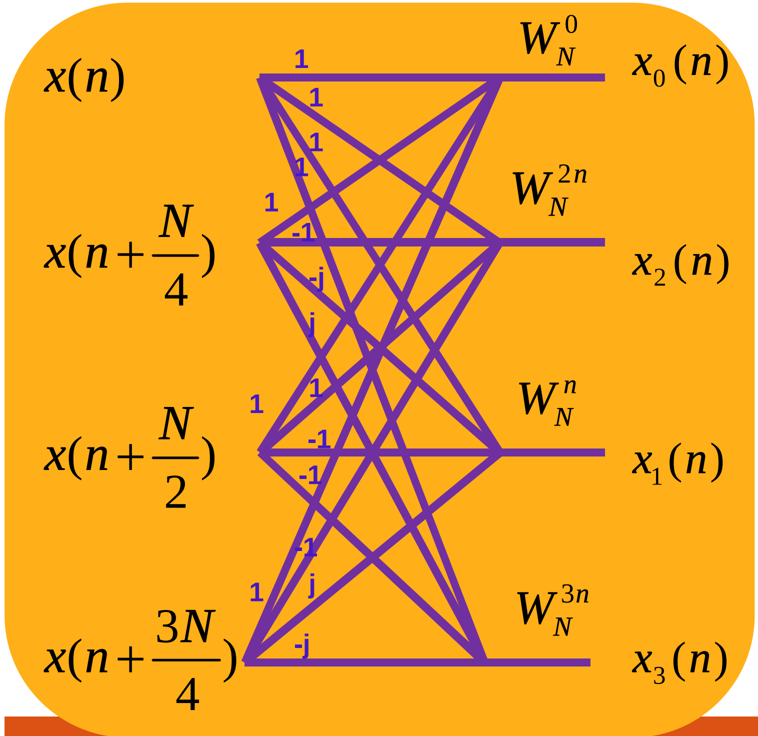
$$0\le k\le\frac{N}{4}-1 \qquad (4\text{-}43)$$


$\mathrm{Im}[W_{16}^{m}]$
$\mathrm{Re}[W_{16}^{m}]$
W_{16}^{12}
W_{16}^{11}
W_{16}^{13}
W_{16}^{10}
W_{16}^{14}
W_{32}^{18}
W_{16}^{9}
W_{16}^{-1}
W_{16}^{15}
W_{16}^{8}
W_{16}^{0}
W_{16}^{7}
W_{16}^{1}
W_{16}^{17}
W_{16}^{6}
W_{16}^{2}
W_{8}^{3}
W_{16}^{5}
W_{16}^{3}
W_{16}^{4}

参考P96 图3-21

基4-DIF FFT算法

$$
\begin{cases}
X(4k)=\sum\limits_{n=0}^{N/4-1}\left[x(n)+x(n+\frac{N}{4})+x(n+\frac{N}{2})+x(n+\frac{3N}{4})\right]W_N^0 W_{N/4}^{kn}\\
X(4k+1)=\sum\limits_{n=0}^{N/4-1}\left[x(n)-jx(n+\frac{N}{4})-x(n+\frac{N}{2})+jx(n+\frac{3N}{4})\right]W_N^n W_{N/4}^{kn}\\
X(4k+2)=\sum\limits_{n=0}^{N/4-1}\left[x(n)-x(n+\frac{N}{4})+x(n+\frac{N}{2})-x(n+\frac{3N}{4})\right]W_N^{2n} W_{N/4}^{kn}\\
X(4k+3)=\sum\limits_{n=0}^{N/4-1}\left[x(n)+jx(n+\frac{N}{4})-x(n+\frac{N}{2})-jx(n+\frac{3N}{4})\right]W_N^{3n} W_{N/4}^{kn}
\end{cases}
\quad 0\le k\le \frac{N}{4}-1
$$



$$
\begin{cases}
x_0(n)=\left[x(n)+x(n+\frac{N}{4})+x(n+\frac{N}{2})+x(n+\frac{3N}{4})\right]W_N^0\\
x_1(n)=\left[x(n)-jx(n+\frac{N}{4})-x(n+\frac{N}{2})+jx(n+\frac{3N}{4})\right]W_N^n\\
x_2(n)=\left[x(n)-x(n+\frac{N}{4})+x(n+\frac{N}{2})-x(n+\frac{3N}{4})\right]W_N^{2n}\\
x_3(n)=\left[x(n)+jx(n+\frac{N}{4})-x(n+\frac{N}{2})-jx(n+\frac{3N}{4})\right]W_N^{3n}
\end{cases}
$$

蝶形运算：×— 3次

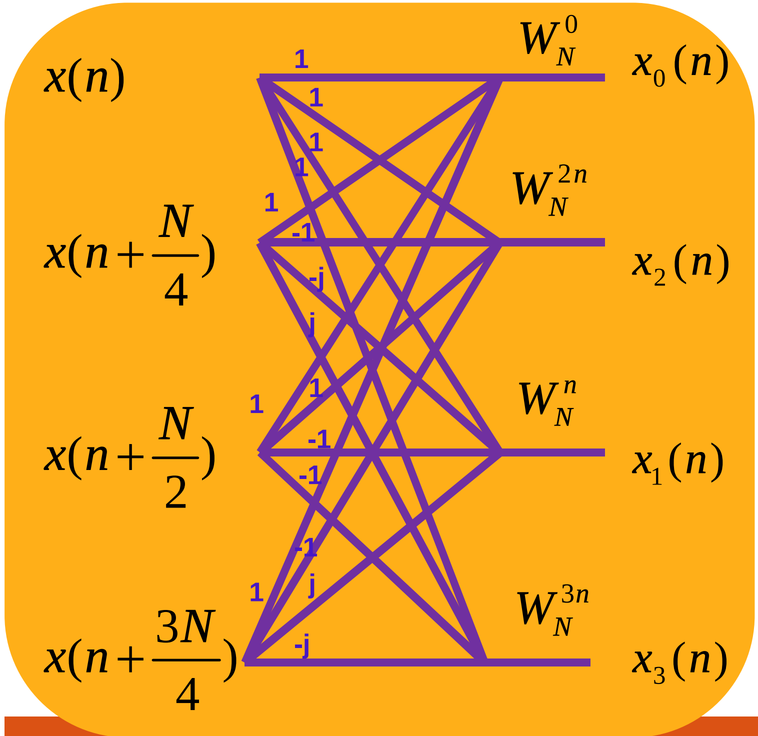
+— ?次

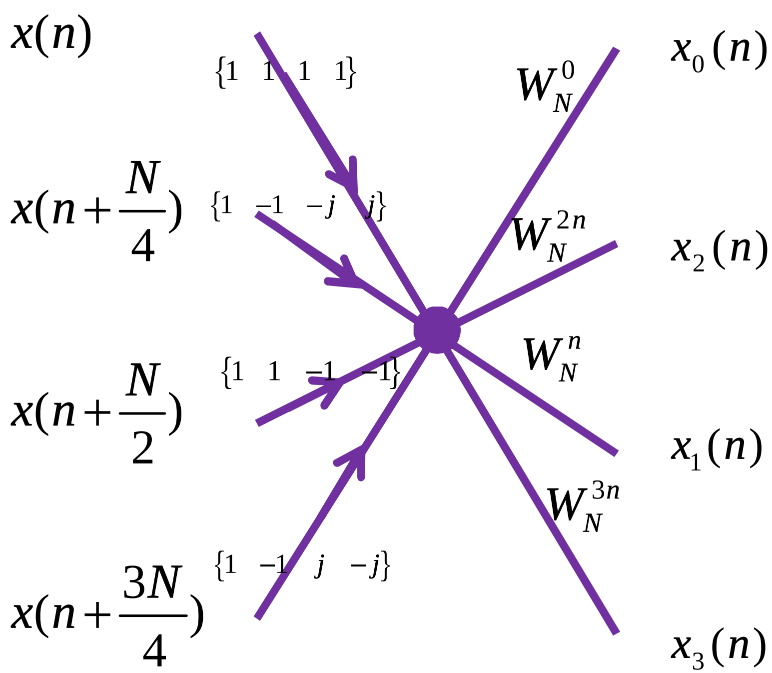
基4-DIF FFT算法

$$\begin{cases} x_0(n)=\left[x(n)+x(n+\frac{N}{4})+x(n+\frac{N}{2})+x(n+\frac{3N}{4})\right]W_N^0 \\ x_1(n)=\left\{\left[x(n)-x(n+\frac{N}{2})\right]+j\left[x(n+\frac{3N}{4})-x(n+\frac{N}{4})\right]\right\}W_N^n \\ x_2(n)=\left[x(n)-x(n+\frac{N}{4})+x(n+\frac{N}{2})-x(n+\frac{3N}{4})\right]W_N^{2n} \\ x_3(n)=\left\{\left[x(n)-x(n+\frac{N}{2})\right]+j\left[x(n+\frac{N}{4})-x(n+\frac{3N}{4})\right]\right\}W_N^{3n} \end{cases}$$

蝶形运算：×— 3次

+— 8次



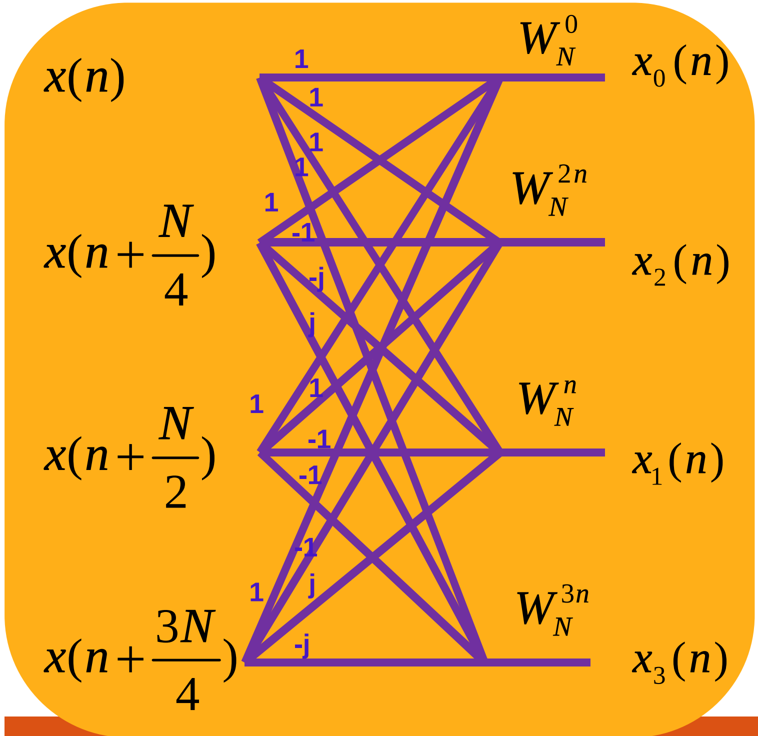


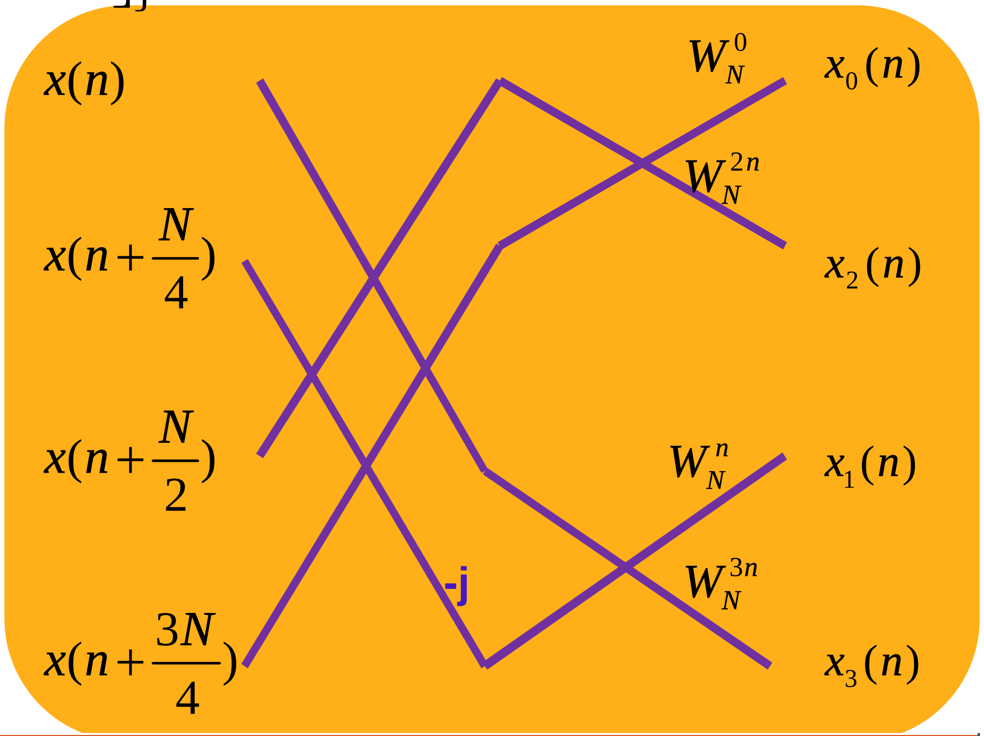
基4-DIF FFT算法

$$
\begin{cases}
x_0(n)=\left\{\left[x(n)+x(n+\frac{N}{2})\right]+\left[x(n+\frac{N}{4})+x(n+\frac{3N}{4})\right]\right\}W_N^0 \\
x_1(n)=\left\{\left[x(n)-x(n+\frac{N}{2})\right]-j\left[x(n+\frac{N}{4})-x(n+\frac{3N}{4})\right]\right\}W_N^n \\
x_2(n)=\left\{\left[x(n)+x(n+\frac{N}{2})\right]-\left[x(n+\frac{N}{4})+x(n+\frac{3N}{4})\right]\right\}W_N^{2n} \\
x_3(n)=\left\{\left[x(n)-x(n+\frac{N}{2})\right]+j\left[x(n+\frac{N}{4})-x(n+\frac{3N}{4})\right]\right\}W_N^{3n}
\end{cases}
$$

蝶形运算：×— 3次

+— 8次 (8个x)





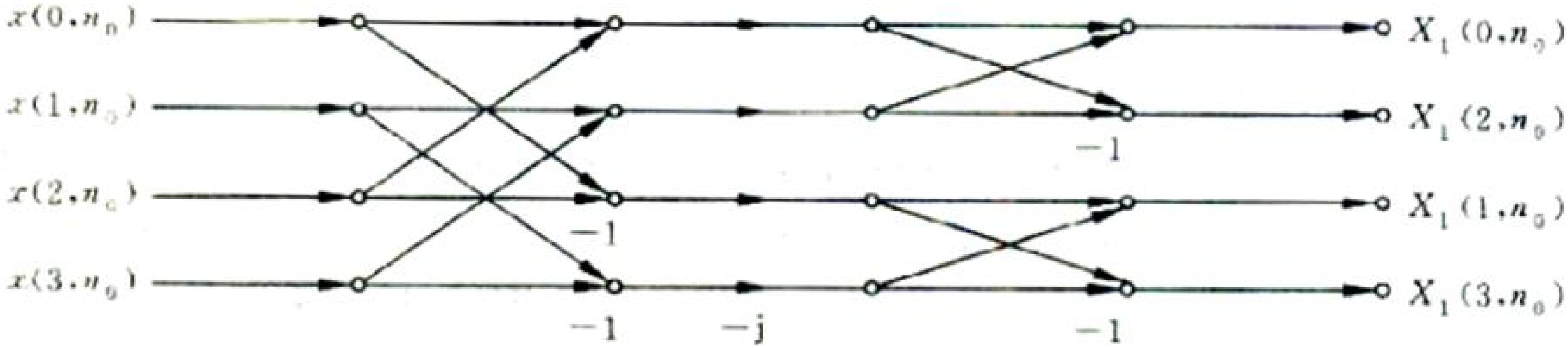


图 4-21　一个基-4 FFT 基本运算的信号流图

基-4

按时间

Or　　　　抽取 FFT算法流图？

按频率

N=16 基-4 按频率抽取FFT流图

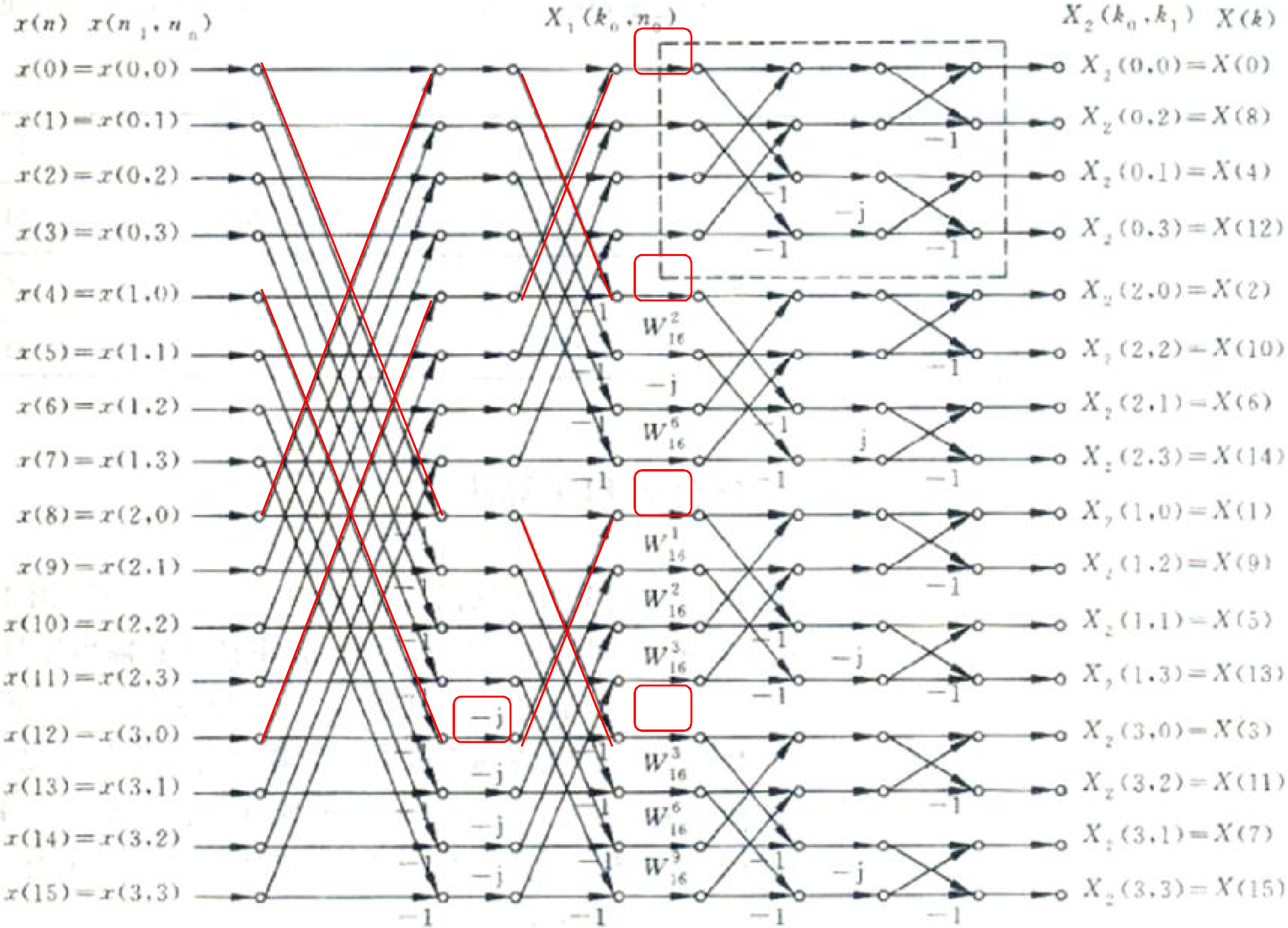


图 4-22 按时间抽选基-4 FFT 流图

回忆： N=12 组合数 基-3x4 FFT流图

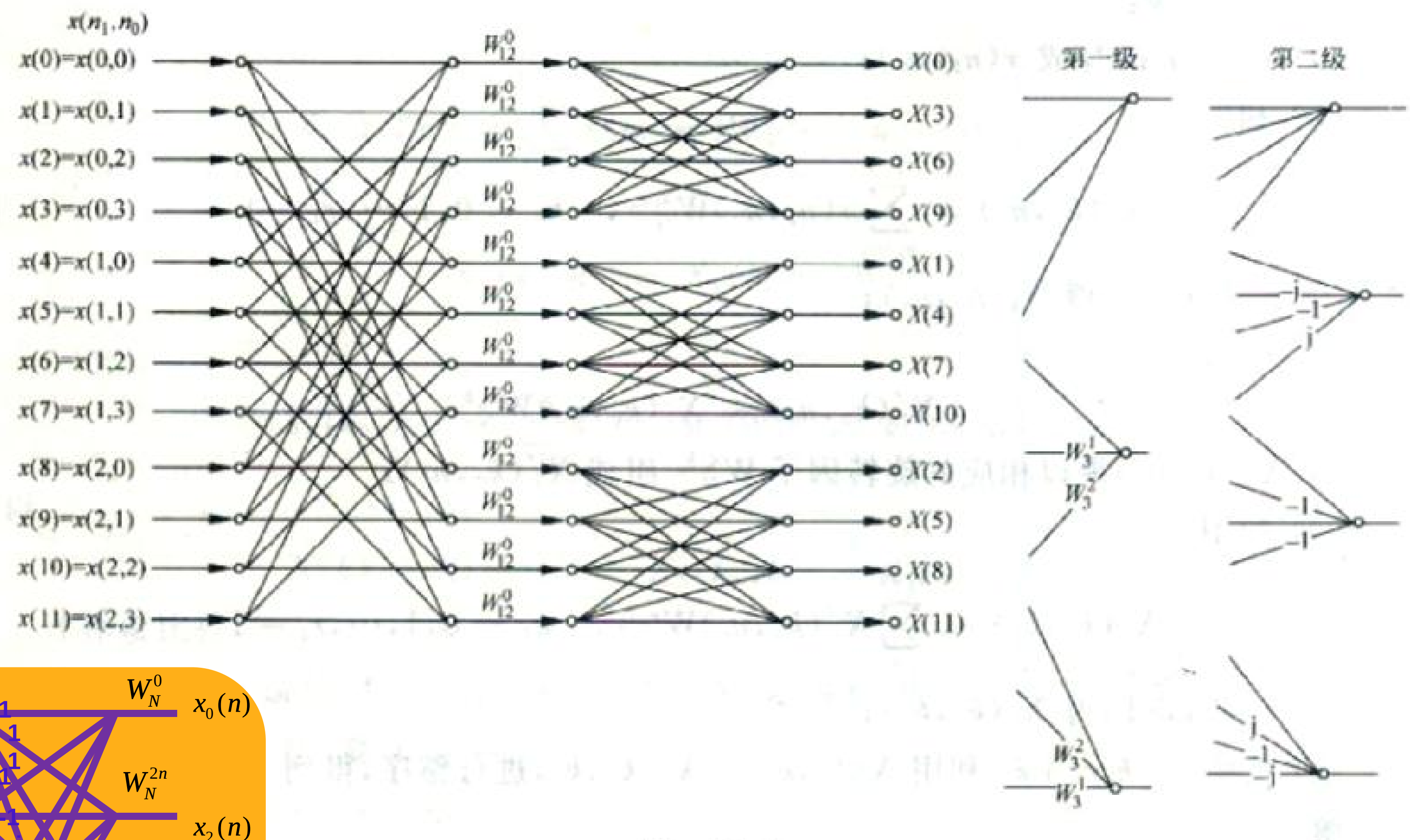
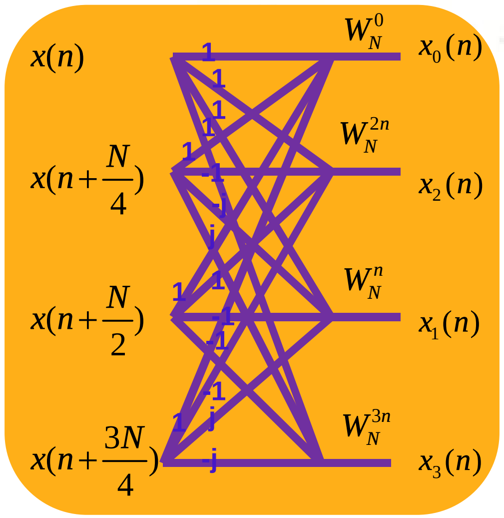
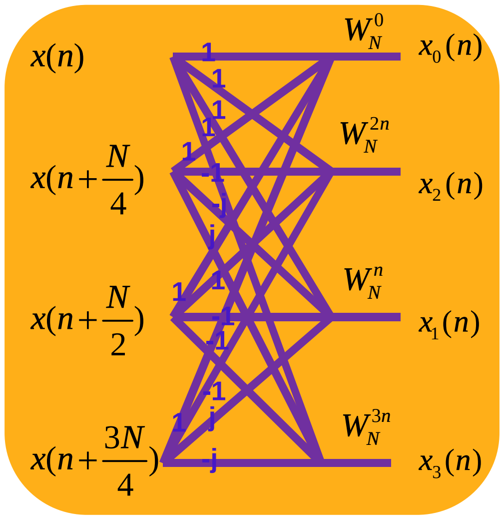


图 P4-5



N=30 基-3x2x5 组合数 FFT流图



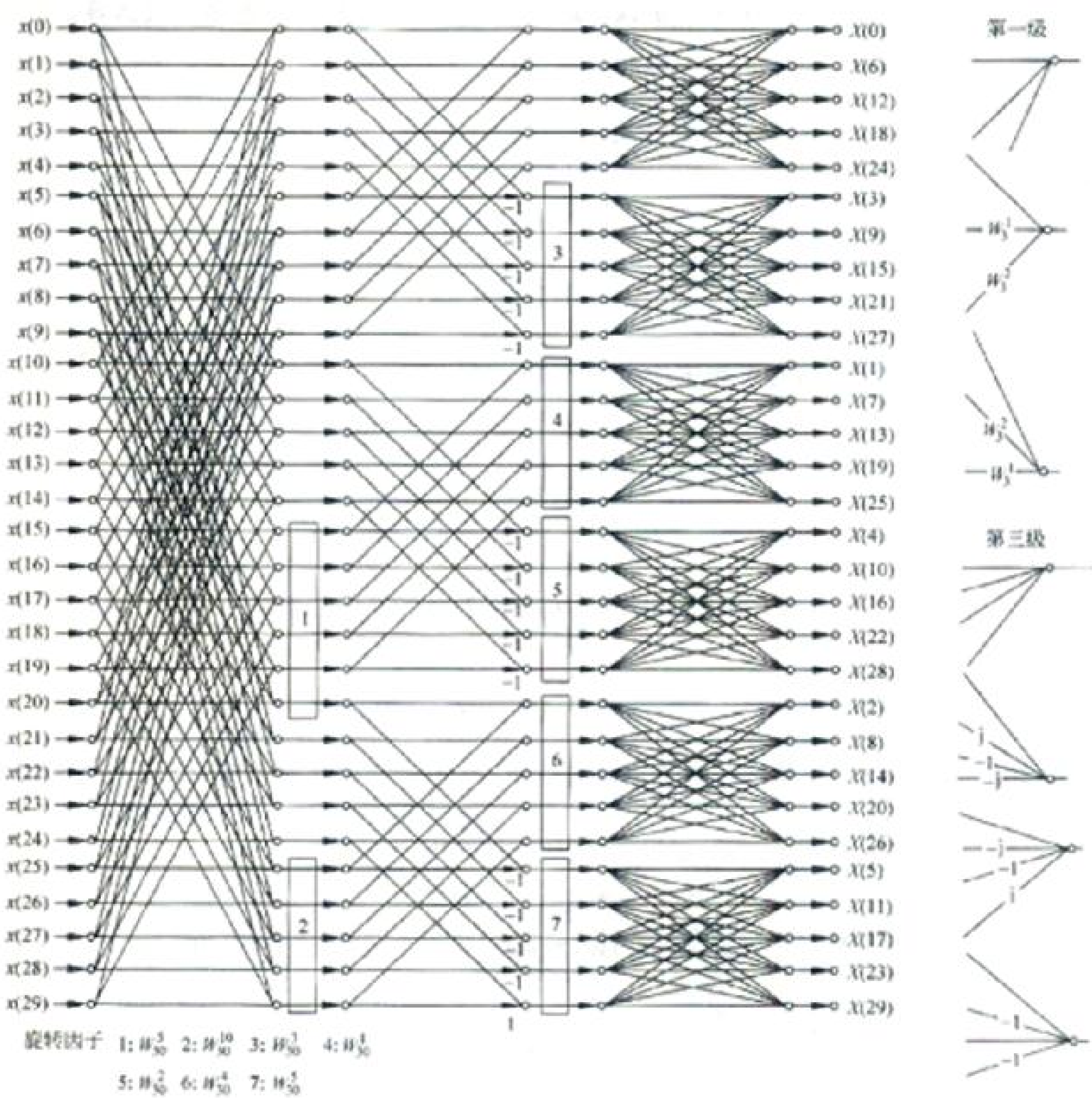


图 P4-6

分裂基FFT算法原理:

合并$X(4k)$与$X(4k+2)$:

$$\begin{cases} X(2k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}[x(n)+x(n+\frac{N}{2})]W_N^{2kn}, \qquad 0\le k\le \frac{N}{2}-1 \\ X(4k+1)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}\left\{\left[\left(x(n)-x(n+\frac{N}{2})\right)-j\left(x(n+\frac{N}{4})-x(n+\frac{3N}{4})\right)\right]W_N^{n}\right\}W_N^{4kn} \\ X(4k+3)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}\left\{\left[\left(x(n)-x(n+\frac{N}{2})\right)+j\left(x(n+\frac{N}{4})-x(n+\frac{3N}{4})\right)\right]W_N^{3n}\right\}W_N^{4kn} \end{cases}$$

$$0\le k\le \frac{N}{4}-1 \qquad (4\text{-}44)$$

令

$$\begin{cases} x_2(n) \overset{\Delta}{=} x(n) + x(n+\frac{N}{2}), \qquad 0 \le n \le \frac{N}{2}-1 \\ x_4^1(n) \overset{\Delta}{=} \left[\left(x(n) - x(n+\frac{N}{2})\right) - j\left(x(n+\frac{N}{4}) - x(n+\frac{3N}{4})\right)\right] W_N^n \\ x_4^2(n) \overset{\Delta}{=} \left[\left(x(n) - x(n+\frac{N}{2})\right) + j\left(x(n+\frac{N}{4}) - x(n+\frac{3N}{4})\right)\right] W_N^{3n} \end{cases}$$

$$0 \le n \le \frac{N}{4}-1$$

$$\downarrow$$

L形蝶形运算：×— 2次
+— 6次

则(4-44)式变为:

$$\begin{cases} X(2k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n)W_N^{2kn}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n)W_{\frac{N}{2}}^{kn}=DFT[x_2(n)] \\ X(4k+1)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_4^1(n)W_N^{4kn}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_4^1(n)W_{\frac{N}{4}}^{kn}=DFT[x_4^1(n)] \\ X(4k+3)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_4^2(n)W_N^{4kn}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_4^2(n)W_{\frac{N}{4}}^{kn}=DFT[x_4^2(n)] \end{cases}$$

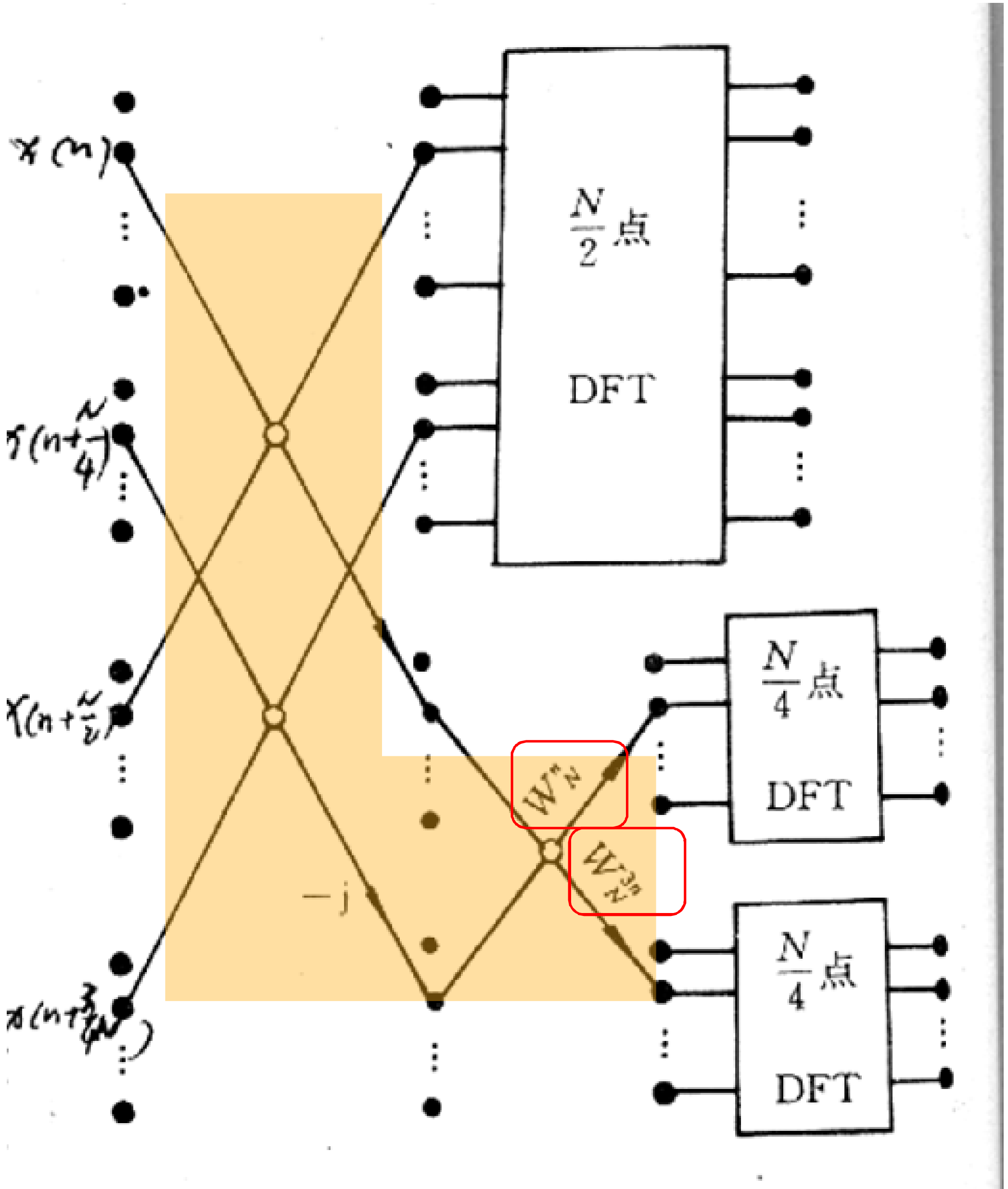


图 4－21 分裂基算法第一次分解 L 形流图

与基4比较W_N

$$X(2k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x_2(n)W_N^{2kn}$$
$$=DFT[x_2(n)]$$

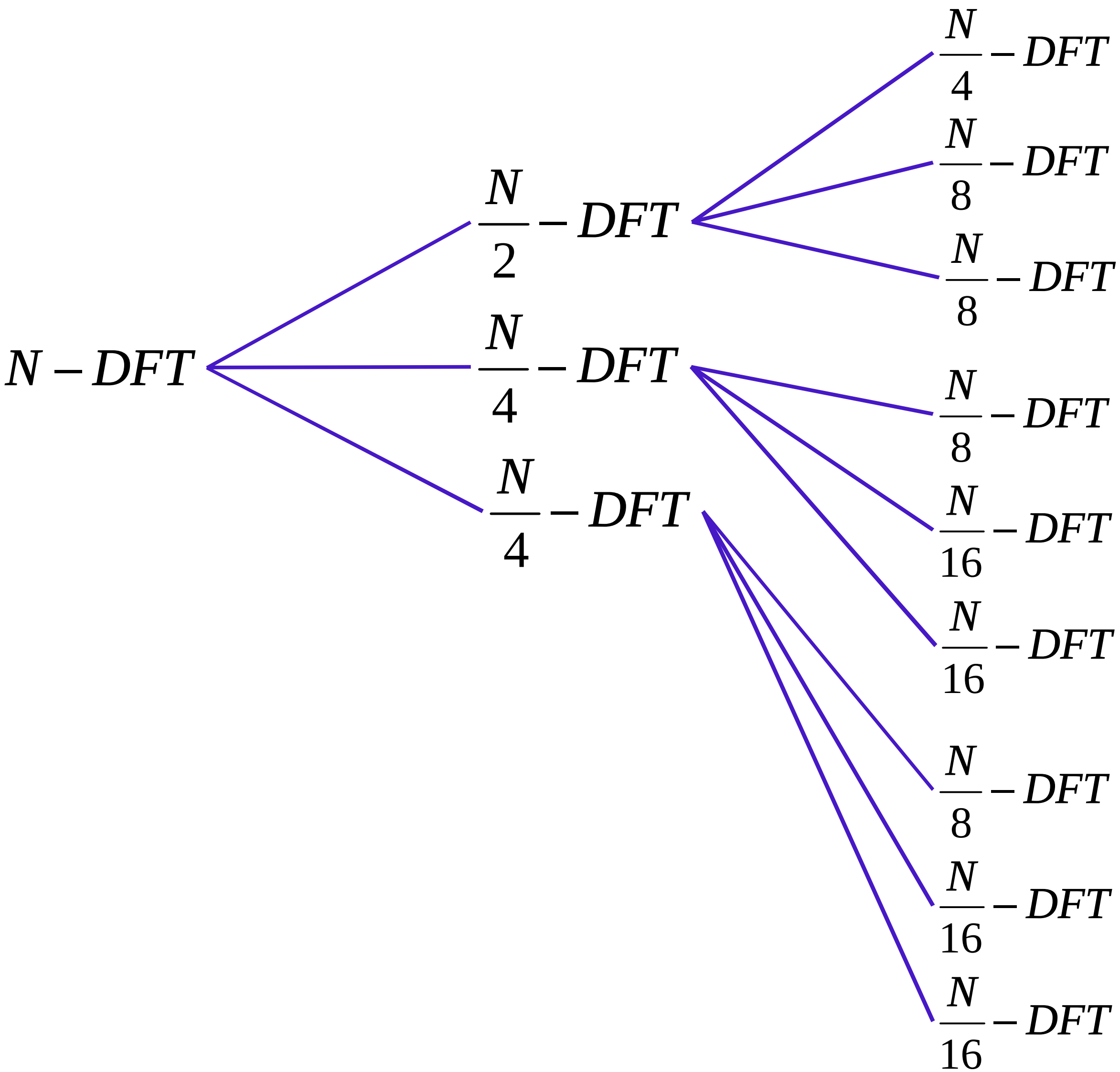
$$X(4k+1)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}x_4^1(n)W_N^{4kn}$$
$$=DFT[x_4^1(n)]$$

$$X(4k+3)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}x_4^2(n)W_N^{4kn}$$
$$=DFT[x_4^2(n)]$$

L形蝶形(流图)

图4-21/P.146

可见：


$N-DFT$
$\frac{N}{2}-DFT$
$\frac{N}{4}-DFT$
$\frac{N}{4}-DFT$
$\frac{N}{4}-DFT$
$\frac{N}{8}-DFT$
$\frac{N}{8}-DFT$
$\frac{N}{8}-DFT$
$\frac{N}{16}-DFT$
$\frac{N}{16}-DFT$
$\frac{N}{8}-DFT$
$\frac{N}{16}-DFT$
$\frac{N}{16}-DFT$

例：N=16　　　分裂基第一次分解L形流图：图4-22 P.147

分解1：$x_1(n) \to x_2(n) \quad 0 \le n \le 7 \quad (\frac{N}{2}-1)$

$x_4^1(n) \quad 0 \le n \le 3 \quad (\frac{N}{4}-1)$

$x_4^2(n) \quad 0 \le n \le 3 \quad (\frac{N}{4}-1)$

分解2：$x_2(n) \to y_2(n) \quad 0 \le n \le 3 \quad (\frac{N}{4}-1) = \frac{N/2}{2}-1$

$y_4^1(n) \quad 0 \le n \le 1 \quad (\frac{N}{8}-1) = \frac{N/2}{4}-1$

$y_4^2(n) \quad 0 \le n \le 1 \quad (\frac{N}{8}-1) = \frac{N/2}{4}-1$

分解3：

$$y_2(n) \to z_2(n) \qquad 0 \le n \le 1$$

$$z_4^1(n) \qquad n = 0$$

$$z_4^2(n) \qquad n = 0$$

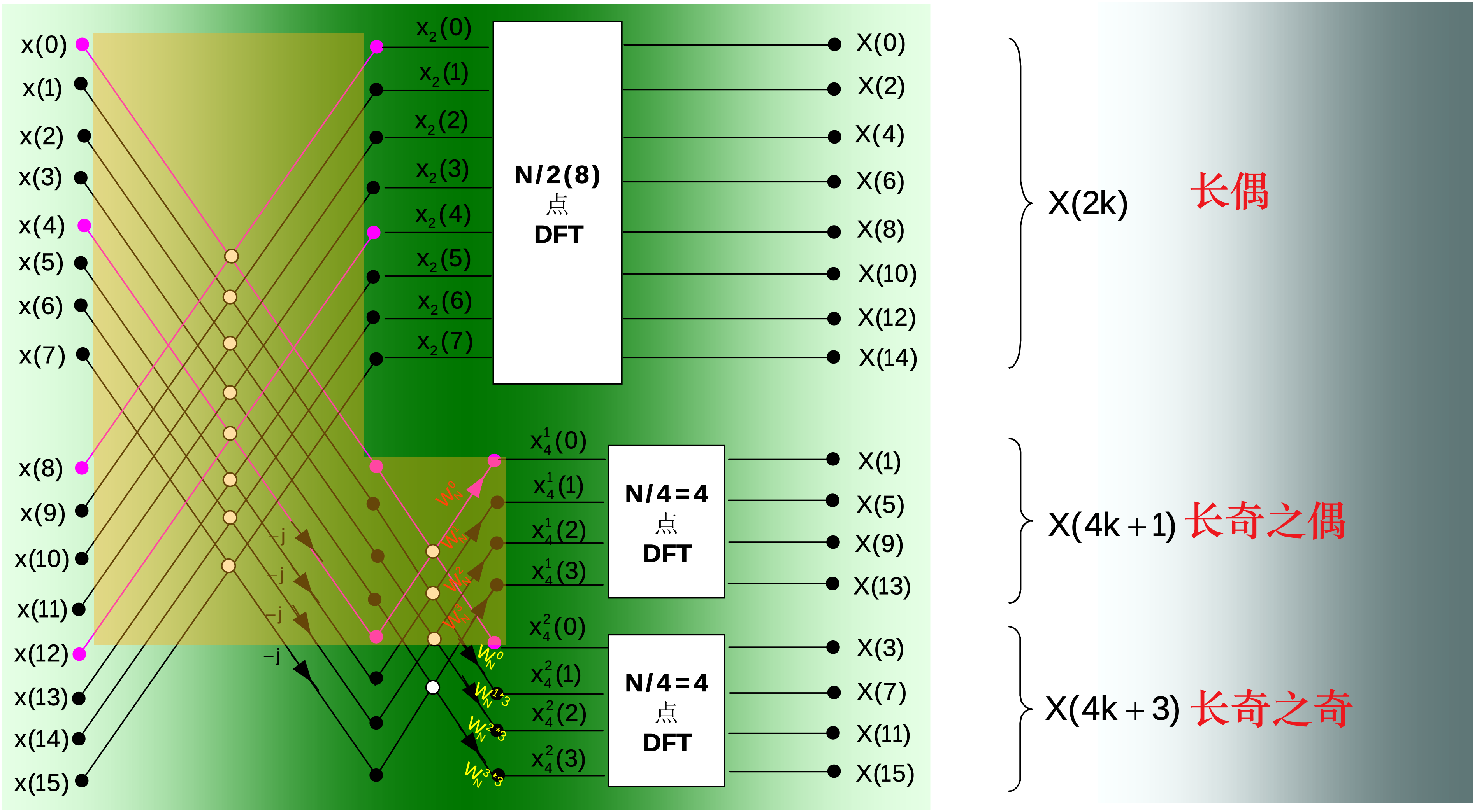
→ 4点分裂基
L形运算流图
图4-24/P.148

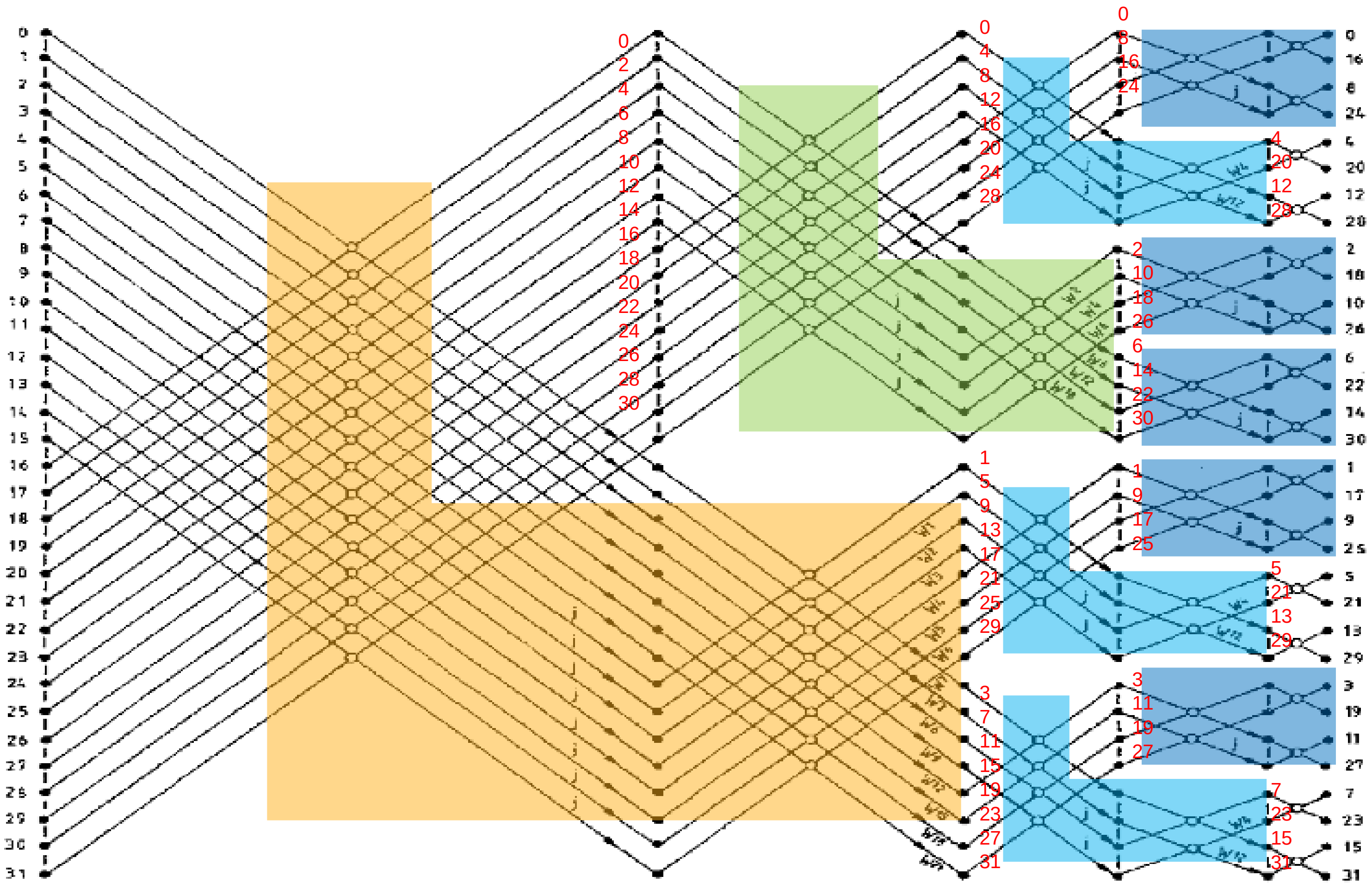
$$x_4^1(n) \to \mathbf{L\ L}$$

$$x_4^2(n) \to \mathbf{L\ L}$$

图4-24 → 图4-23 → 图4-22 ⇒ 图4-25 P.148

16点分裂基DIF-FFT算法流图


x(0)
x(1)
x(2)
x(3)
x(4)
x(5)
x(6)
x(7)
x(8)
x(9)
x(10)
x(11)
x(12)
x(13)
x(14)
x(15)
–j
–j
–j
–j
x2(0)
x2(1)
x2(2)
x2(3)
x2(4)
x2(5)
x2(6)
x2(7)
N/2(8)
点
DFT
x4(0)
x4(1)
x4(2)
x4(3)
N/4=4
点
DFT
x4(0)
x4(1)
x4(2)
x4(3)
N/4=4
点
DFT
X(0)
X(2)
X(4)
X(6)
X(8)
X(10)
X(12)
X(14)
X(1)
X(5)
X(9)
X(13)
X(3)
X(7)
X(11)
X(15)
X(2k)
长偶
X(4k+1) 长奇之偶
X(4k+3) 长奇之奇



蝶形个数：8　　4　　6　　5

分裂基

按时间

Or　　　　抽取 FFT算法流图？

按频率

N=16 分裂基 按时间抽取 FFT算法流图

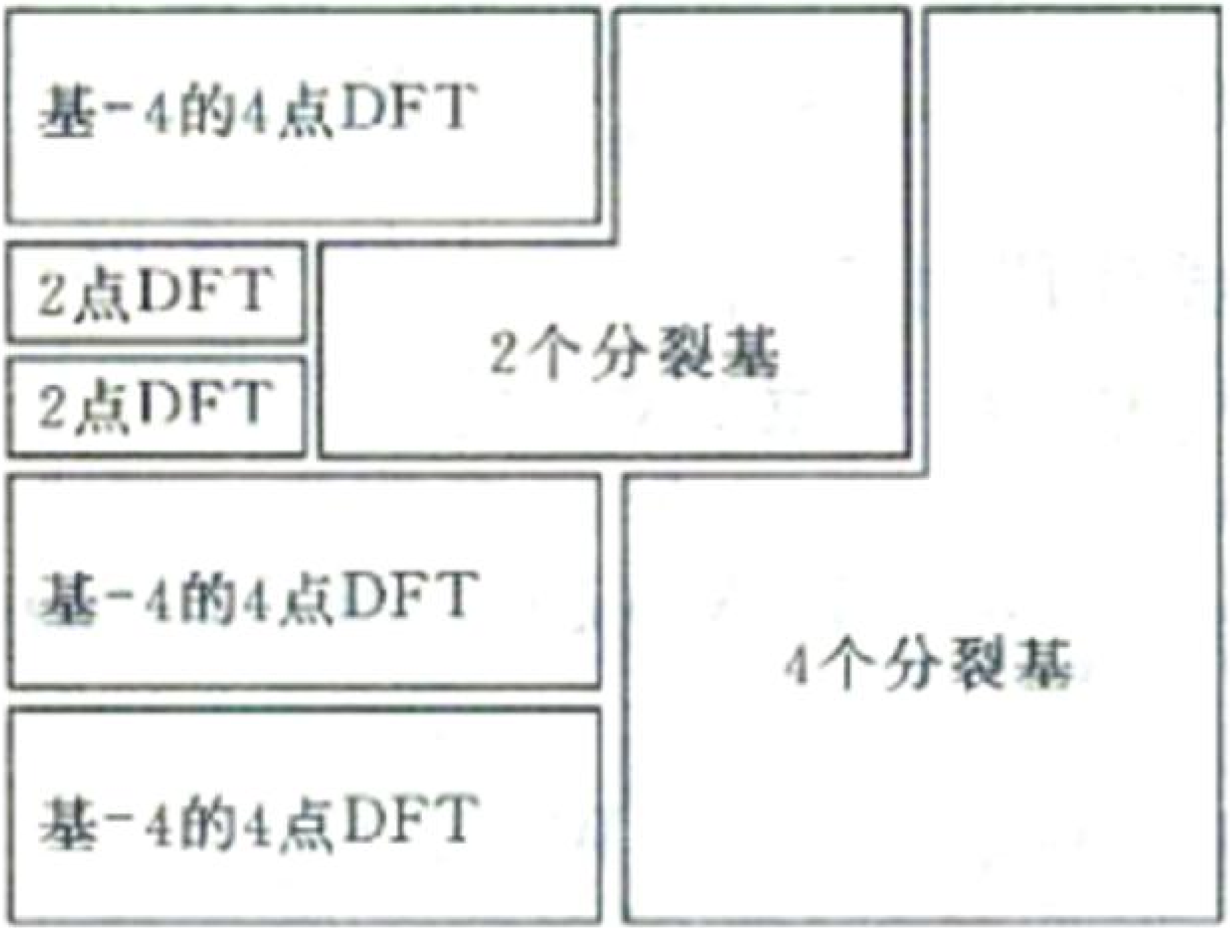


图 4-25　$N=2^4=16$ 点的分裂基 FFT 的示意图

N=16 分裂基 按时间抽取 FFT算法流图

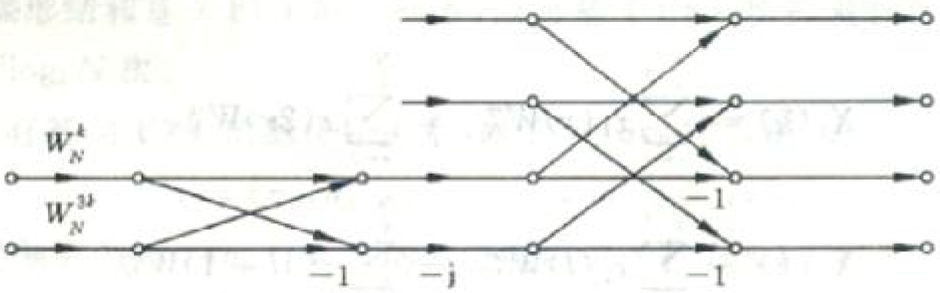


图 4-24 分裂基 FFT 算法的一个基本蝶形运算

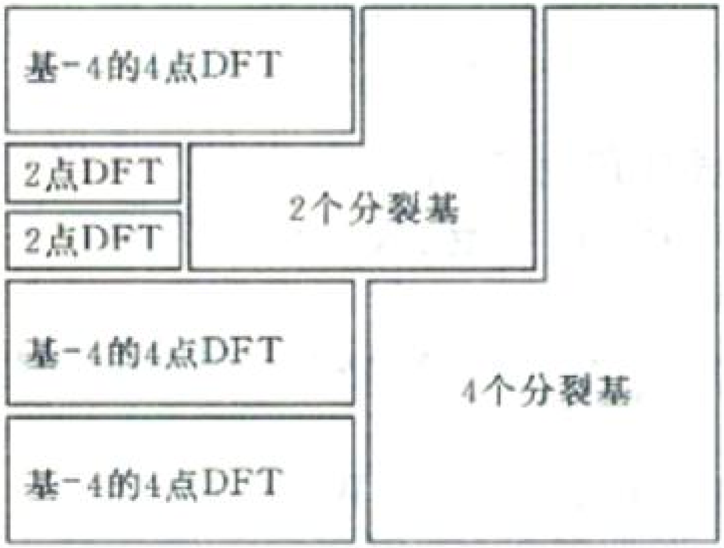


图 4-25 $N=2^4=16$ 点的分裂基 FFT 的示意图

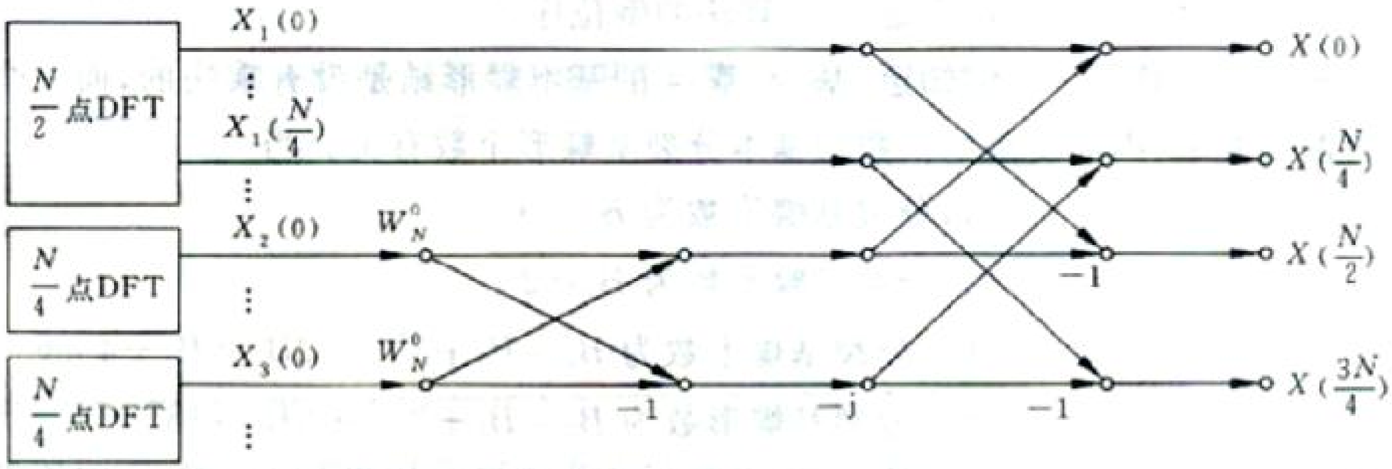


图 4-23 分裂基 FFT 算法(时间抽选)的第一级流图

N=16 分裂基 按时间抽取 FFT算法流图

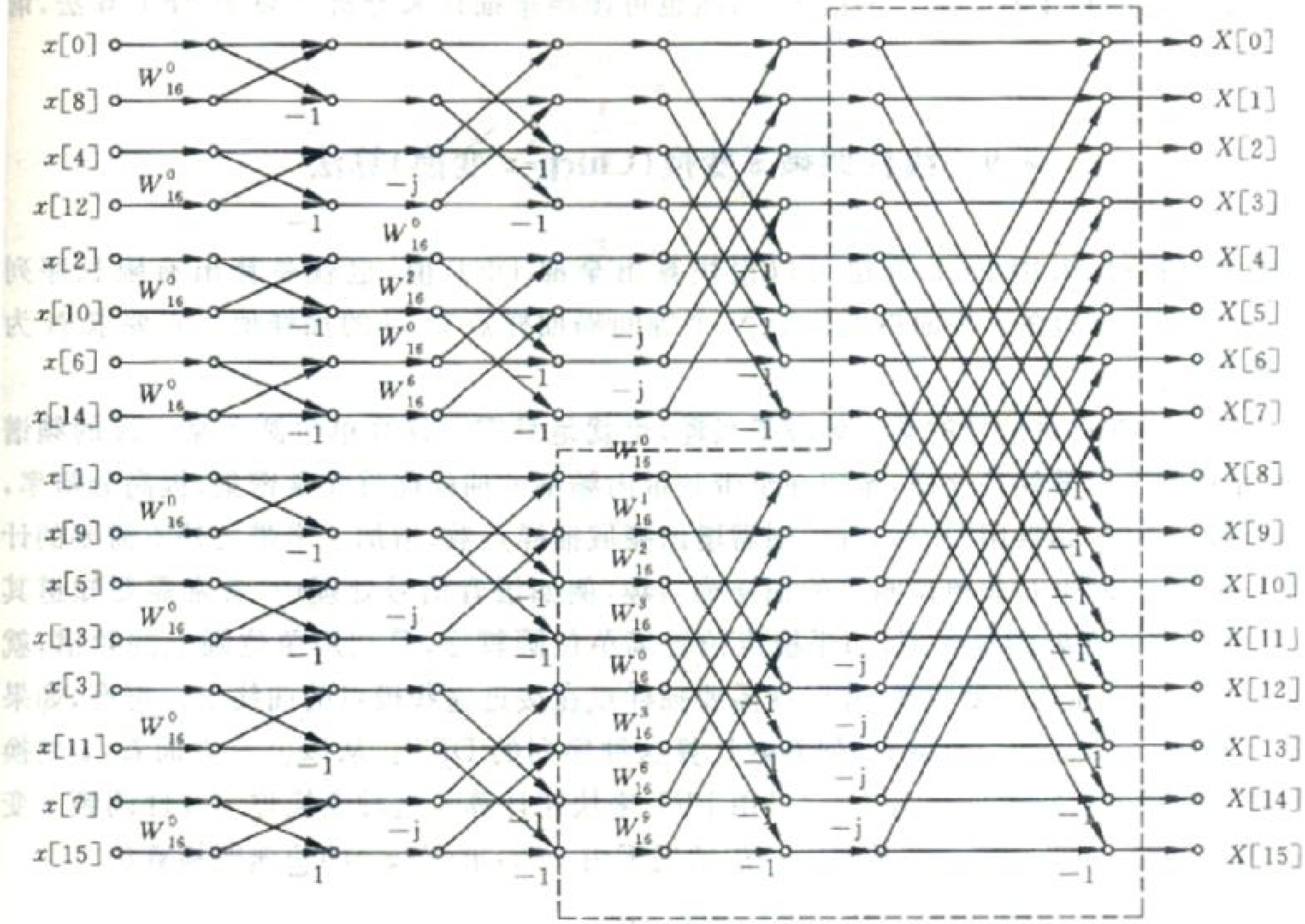


图 4-26　N＝2⁴＝16 分裂基 FFT 算法(按时间抽选)的流图

(输入二进制倒位序,输出正常顺序)

注:上图只用虚线框表示了一级的倒 L 结构

N=16 基-2 按时间抽取FFT流图

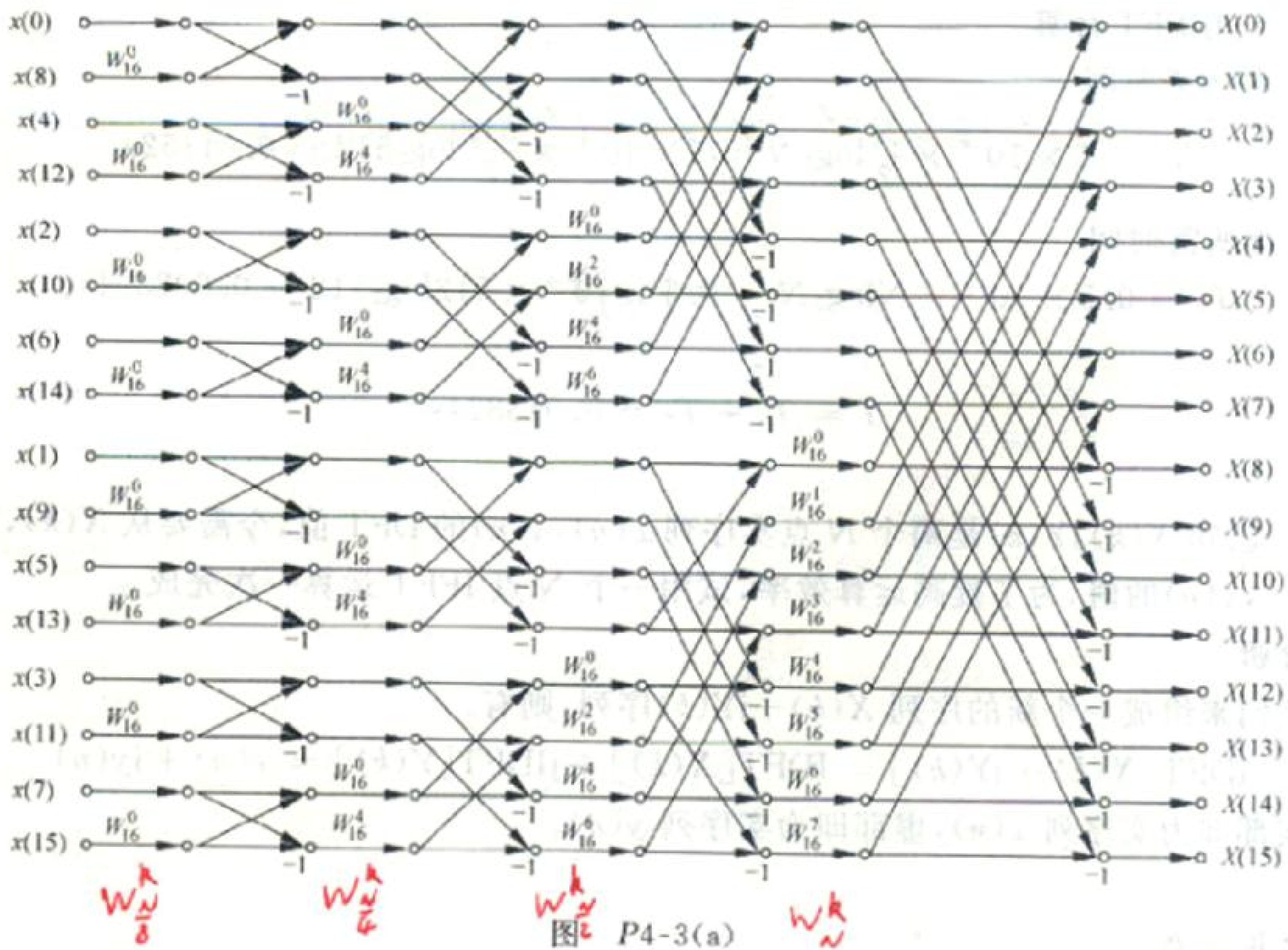


图 P4-3(a)

基-2、基-4、分裂基按时间抽取 FFT算法流图x(n)输入序号是否相同？

N=16 基-2 按频率抽取FFT流图

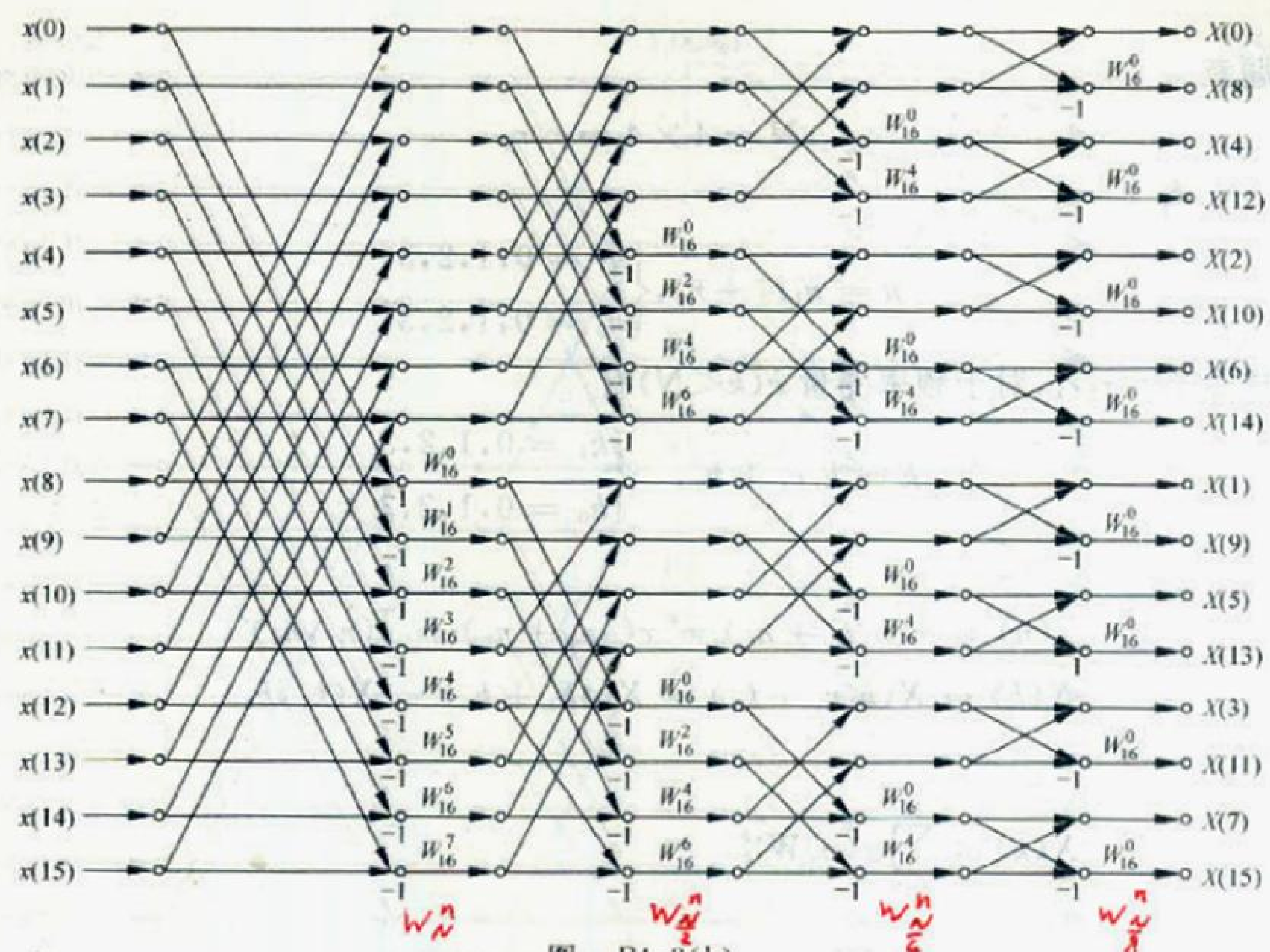


图 P4-3(b)

N=16 基-4 按频率抽取FFT流图

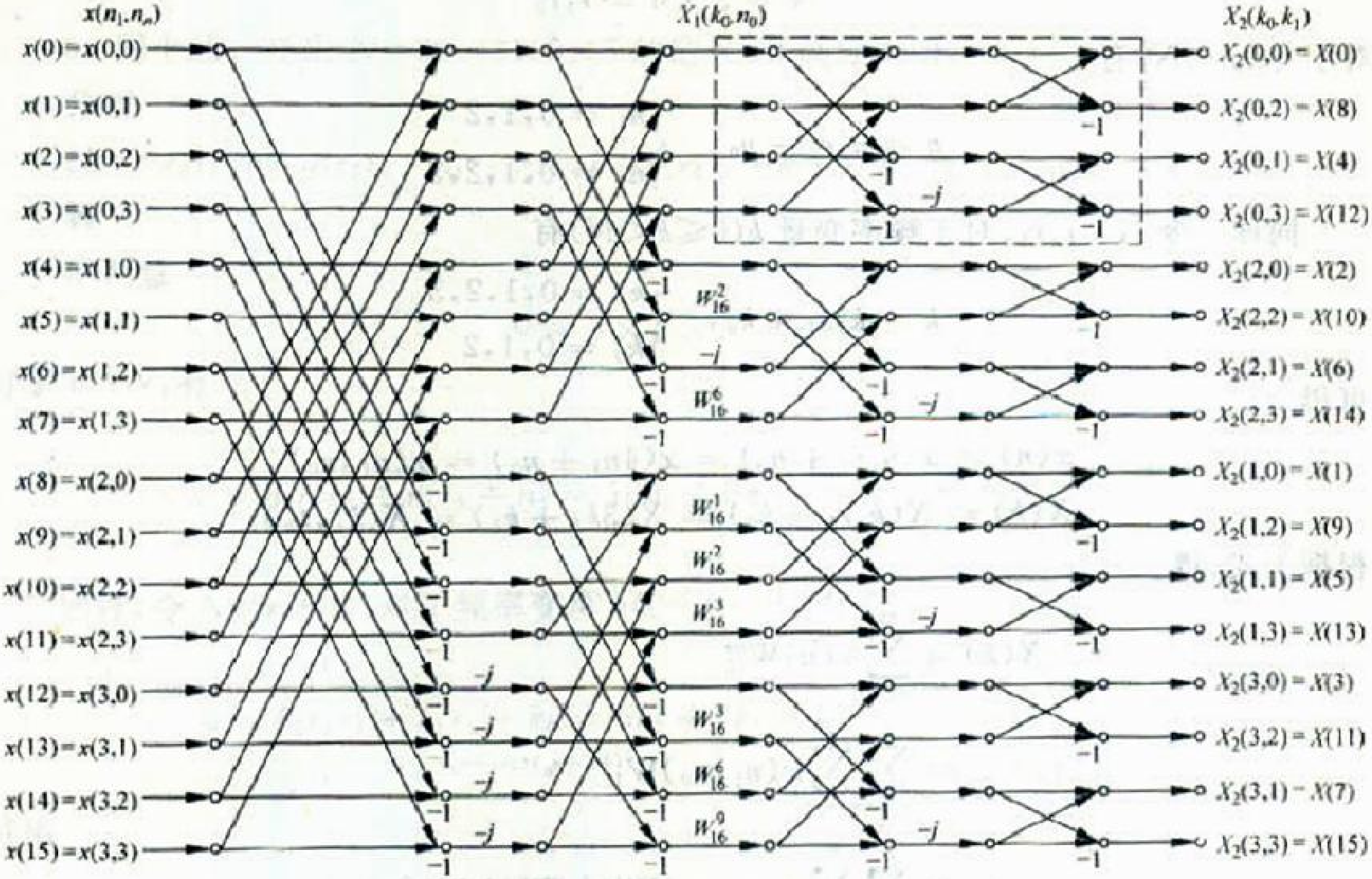


图　P4-4

基-2、基-4、分裂基按频率抽取 FFT算法流图X(k)输出序号是否相同？

往年真题：

1、试给出4点分裂基FFT算法L形蝶形运算公式，并画出相应的L形蝶形运算流图。

参考：**P148 图4-24**

三、运算量分析

L形分解：共M-1级　　　N=2^M

每级L形碟形个数：

$$l_1 = \frac{N}{4}$$

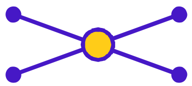
$$l_j = \frac{N}{4} - \frac{l_{j-1}}{2}, \qquad j = 2,3,\ldots,M-1$$

每个L形碟形：×— 2次

总的复数乘法次数：

$$C_M = 2 \times \sum_{j=1}^{M-1} l_j = \frac{1}{3} N \log_2^N - \frac{1}{9} N + (-1)^M \frac{2}{9} \qquad \textbf{(4-48)}$$

相比 $\frac{N}{2}\log_2^N$，下降33% $= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \Big/ \frac{1}{2} \times 100\%$

+ — $N \log_2^N$ 相同（∵  个数相同） 理解

§4-7 实序列的FFT算法

一、问题的提出

$$\forall\, x(n) — DFT[x(n)] \to FFT$$

实数： $\forall\, x(n) = x^*(n), \qquad 0 \le n \le N-1$

$$DFT[x(n)] \longrightarrow FFT \quad ?$$

可能的办法：

① $x(n) \to x(n) + j0 \to y(n) \to FFT$

② $x(n) \to DFT[x(n)] \to$ 专用算法/硬件

③ 能否有更好的方法吗？

二、算法一：用一个N-FFT同时计算两个N点实序列

$$\forall\ x_1(n),\qquad 0 \le n \le N-1$$

$$x_2(n),\qquad 0 \le n \le N-1$$

$$x(n) \overset{\Delta}{=} x_1(n) + jx_2(n)$$

b b b

$$X(k) = X_1(k) + jX_2(k),$$

$X_1(k)$, $X_2(k)$都是复数序列（Matlab）

DFT的性质：[P.91]

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

b b b

$$X(K) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

周期共轭对称分量　　周期共轭反对称分量

$$x_r(n) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

$$jx_l(n) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$

即：

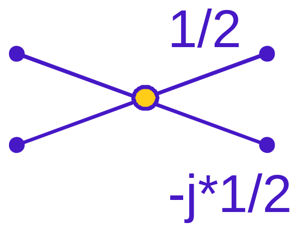
$$X_{ep}(k) \overset{\Delta}{=} DFT[x_r(n)] \quad = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]$$

$$X_{op}(k) \overset{\Delta}{=} DFT[jx_i(n)] \quad = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)]$$

$$\therefore X_1(k) = X_{ep}(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] \qquad \text{(4-51)}$$

$$X_2(k) = -jX_{op}(k) = -\frac{j}{2}[X(k) - X^*(N-k)] \qquad \text{(4-52)}$$

$$\begin{matrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{matrix} \longrightarrow x(n) \xrightarrow{FFT} \begin{matrix} X(k) \\ X^*(N-k) \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{matrix} \quad k = 0,1,\ldots,N$$

三、算法二：用一个N-FFT计算一个2N点实序列

$$\forall\ x(n)=x^{*}(n),\qquad 0\le n\le 2N-1$$

令：

$$\left.\begin{aligned}x_1(n)&=x(2n)\\ x_2(n)&=x(2n+1)\end{aligned}\right.\quad n=0,1,\dots,N-1$$

$$y(n)=x_1(n)+jx_2(n)$$

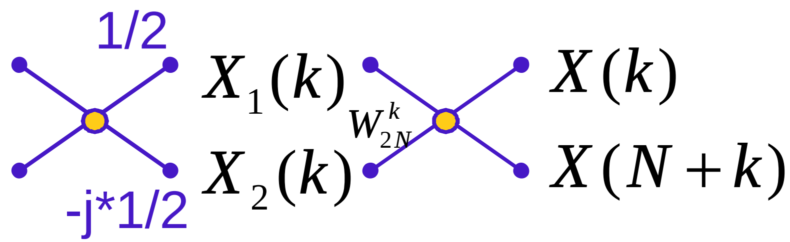
$$\begin{cases}X_1(k)=Y_{ep}(k)=\dfrac{1}{2}[Y(k)+Y^{*}(N-k)]\\ X_2(k)=-jY_{op}(k)=-j\dfrac{1}{2}[Y(k)-Y^{*}(N-k)]\end{cases}$$

$$Y(k)=X_1(k)+jX_2(k)$$

$$\begin{cases}X(k)=X_1(k)+W_{2N}^{k}X_2(k)\\ X(N+k)=X_1(k)-W_{2N}^{k}X_2(k)\end{cases}\qquad 0\le k\le N-1$$

见P127 图4-2

$$x(n)\rightarrow\begin{matrix}x_1(n)\\ x_2(n)\end{matrix}\rightarrow y(n)\xrightarrow{FFT}\begin{matrix}Y(k)\\ Y^{*}(N-k)\end{matrix}$$



往年真题：

4、设有两个有限长实序列，试给出用基-2 FFT计算其线性卷积的方法步骤（要求尽量减少乘法运算次数），并与用线性卷积定义直接计算时的运算量做以比较。

1.x(n)->X(k)

y(n)->Y(k)

可以采用实序列FFT算法

N点FFT计算2N点

2.x(n)*y(n)=IFFT[X(k)Y(k)]

综合4-7(实序列)和4-10(卷积)

往年真题：

5、已知实序列x(n)和y(n)，长度分别为N和M，试给用

仅用基-2 FFT正变换快速计算其线性卷积的方法步骤，

要求尽量减少乘法运算次数

。

06(08-09)

问题：

1，与基2比较，基4FFT算法运算量，复乘？复加？

2，与基2和基4FFT比较，分裂基FFT算法能够减小运算量原理？