数字信号处理

周治国

2015.9

第三章
离散傅里叶变换

§3-6 频域采样

问题：
采用DFT实现了频域取样，对于任意一个频率特性能否用频率取样的方法去逼近？

研究：
1，限制？
2，经过频率取样后有什么误差？
3，如何消除误差？
4，取样后所获得的频率特性怎样？

§3-6 频域采样

一、取样点数的限制

$\forall x(n),$ 任一非周期序列（绝对可和）

$$X(z) \to X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jwn}$$

$$X(k) \stackrel{\triangle}{=} X(e^{jw})\Big|_{w=\frac{2p}{N}k,k=0,1,\cdots,N-1}$$

注意：$X(k) \neq DFT[x(n)]$ 为什么？

问题：$X(k), 0 \le k \le N-1 \xrightarrow{?} x(n)$

频率取样后，信息有没有损失？能否用序列频率特性取样值X(k)恢复出原序列x(n)？

∵频域取样→时域周期化

∴若 $x(n)$ 为无限长序列，则不可能由 $X(k) \to x(n)$

问题：

若有$x(n), n = 0,1,\ldots, M-1$

如何选取**N**才能使

$$X(k) \to x(n)$$

$$0 \le k \le N-1 \qquad 0 \le n \le M-1$$

§ 3-6 频域采样

令 $\tilde{X}(k) \overset{\triangle}{=} X((k))_N \longleftrightarrow \tilde{x}'(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn} \quad \forall n$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{M-1}x(m)W_N^{km}\right]W_N^{-kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1}x(m)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1}x(m)d\left((n+lN)-m\right) \quad \forall l, n$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty}x(n+lN) \rightarrow x(n) \text{ 的周期延拓}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k} = \begin{cases} 1, & m = n + lN \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \delta((n+lN)-m)$$

§3-6 频域采样

∴只有当 $N \geq M$ 时（否则 $\Delta w = \dfrac{2p}{N}$ 太大，导致混叠），

$$\tilde{x}'(n) \to \tilde{x}'(n)R_N(n) \to x(n), \quad 0 \leq n \leq M-1$$

既然

$$X(k) \quad \to \quad x(n)$$

$$0 \leq k \leq N-1 \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

$$\downarrow$$

$$\forall z, \quad X(z) = ?$$

N点有限长序列x(n)，可从单位圆X(z)的N个取样值X(k)恢复，因而这N个X(k)也应该能完全表达整个X(z)函数及频响X(e^{jw})。DFT的综合就是z变换。

§3-6 频域采样

二、内插公式

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\right]z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\sum_{n=0}^{N-1}\left(W_N^{-k}z^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-\boxed{W_N^{-kN}}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \qquad \boxed{W_N^{-kN}}=1$$

$$=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \qquad (3\text{-}101)$$

$X(z)$的内插公式

$$=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)f_k(z) \qquad (3\text{-}102)$$

式中：

$$f_k(z)=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

（内插函数）

在已知X(k)时，可根据内插公式求得任意z点的X(z)值，因此X(z)的N个取样点的X(k)值，包含了z变换的全部信息。

§ 3-6 频域采样

类似的，有：$X(e^{jw})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)f_k(z)\Big|_{z=e^{jw}}$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)f_k(e^{jw})$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)f(w-\frac{2p}{N}k)$$

式中：

$$f(w)=\frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{wN}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}e^{-jw\left(\frac{N-1}{2}\right)}$$

比较：时域取样定理
频域取样公式

§3-7 用DFT对连续时间信号逼近的问题

若信号持续时间为有限长，则其频谱无限宽；
若信号的频谱为有限宽，则其持续时间无限长。
严格来说，持续时间有限的带限信号是不存在的。

为满足DFT的变换条件，实际上对频谱很宽的信号，为防止时域取样后产生频谱混叠失真，可用前置滤波器滤除幅度较小的高频分量，使连续时间信号的带宽小于折叠频率。

对于持续时间很长的信号，取样点数太多以致无法存储和计算，只好截取为有限长进行DFT。

所以，用DFT对连续时间信号进行傅里叶分析必然是近似的，近似的准确程度严格的说是被分析波形的一个函数。

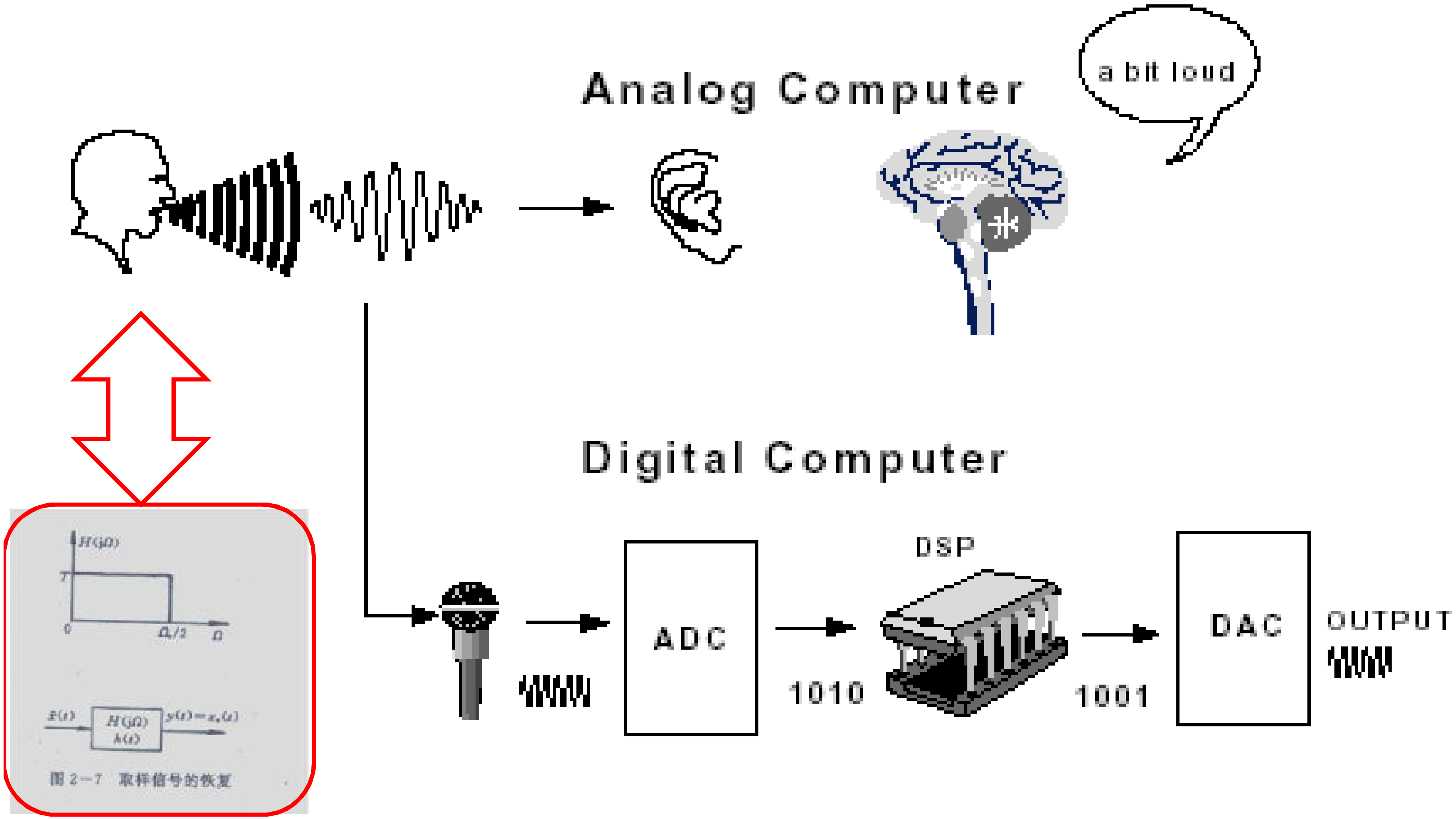
两个变换之间的差异是因为DFT需要对连续时间信号取样和截断为有限列长而产生。

思考1：

课本P100上说：“信号的持续时间为有限长，则其频谱无限宽；若信号的频谱为有限宽，则其持续时间无限长。”

人唱一首歌，持续时间有限长，是否频谱无限宽？感觉好像应该有限宽。试解释这一现象。

数字信号处理系统的典型框图



解释：人的喉咙相当于低通滤波器。歌曲的频谱在人头脑中“酝酿”的时候“持续时间为有限长，其频谱无限宽”；但经过人喉咙唱出来的时候“其频谱为有限宽，且其持续时间无限长”。

§ 3-7 用DFT对连续时间信号逼近的问题

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_a(t) & \xrightarrow{\text{抽样}} x_a(nT) \xrightarrow{\text{截取}} & x(n) & \overset{\text{DFT}}{\Leftrightarrow} & X(k) & \approx & X_a(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \\
\updownarrow & & \text{DTFT}\updownarrow & & \| & & \\
X_a(e^{j\omega}) & \approx & X(e^{j\omega}) & \text{—} & X(e^{jw})\Big|_{w=\frac{2p}{N}k} & &
\end{array}
$$

P118
清华

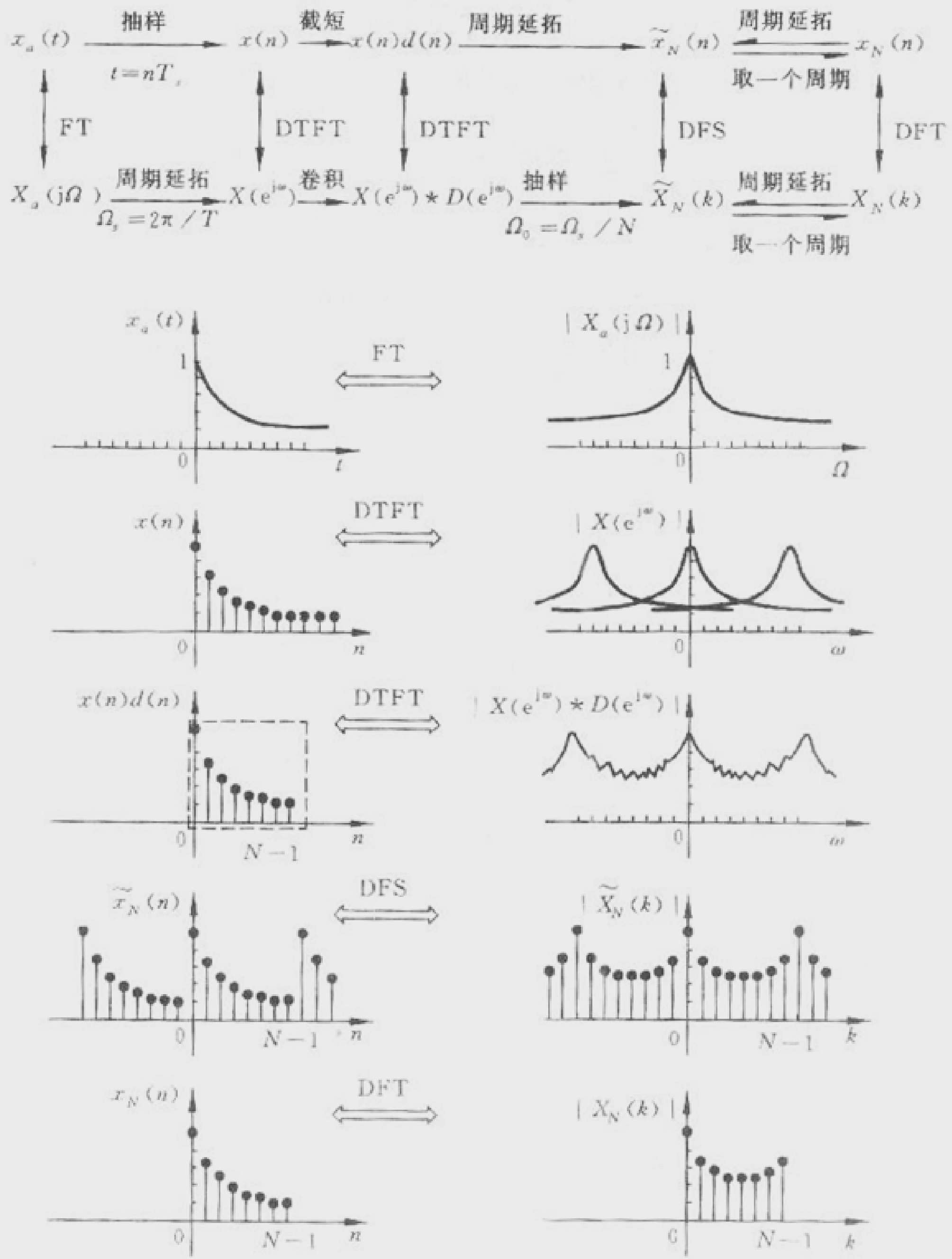


图 3-15　利用 DFT 对 CTFT(连续时间傅里叶变换)逼近的全过程

§3-7 用DFT对连续时间信号逼近的问题

一、混叠现象

消除办法：

$$f_s \geq 2f_h \qquad T \leq \frac{1}{2f_h} \qquad F = \frac{1}{NT} = \frac{f_s}{N} \qquad t_p = \frac{1}{F} = NT$$

取样频率　信号最高频率　取样周期　频率分量间的增量（频率分辨率）　最小记录长度

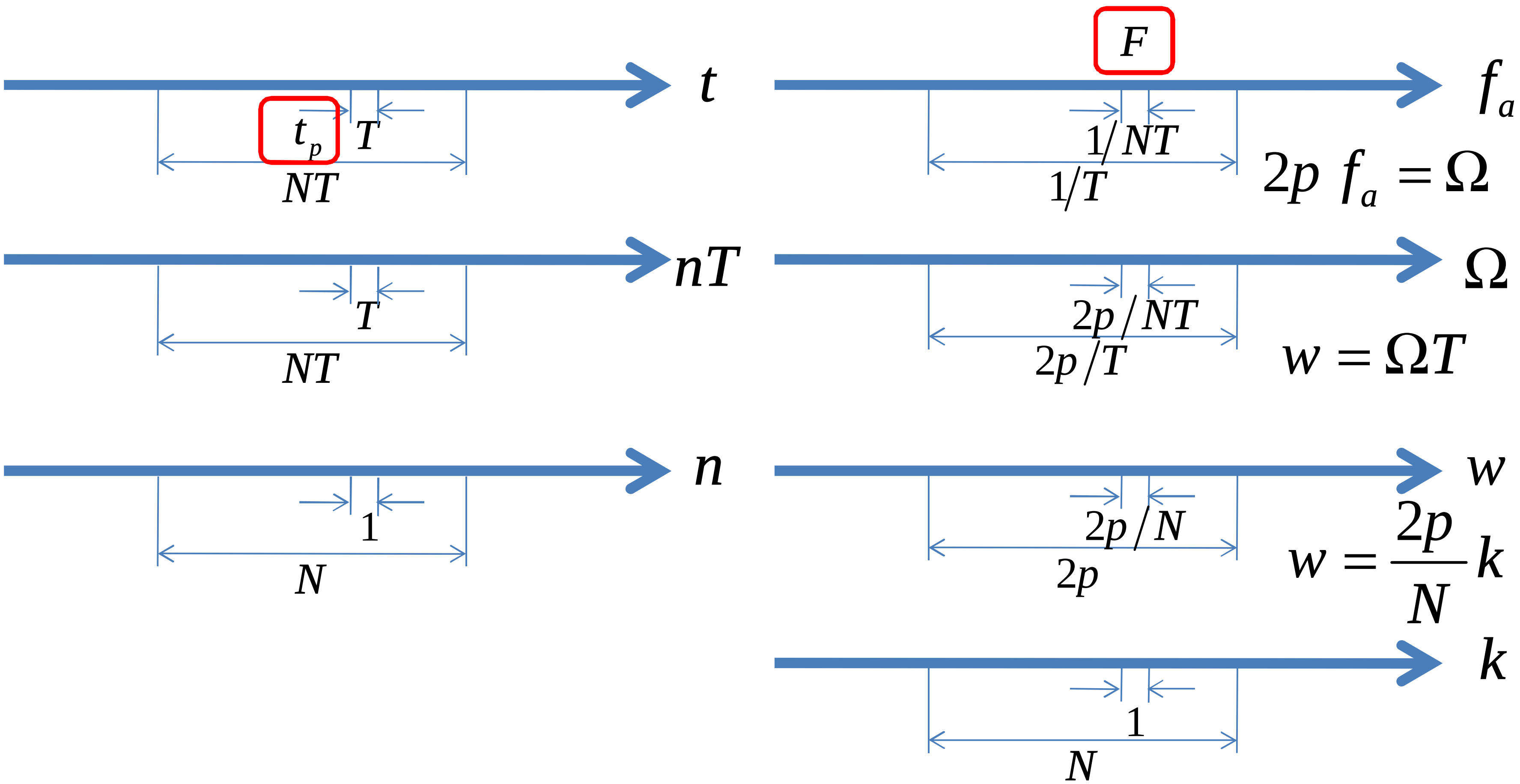
实际中通常：

$$f_s = (3 \sim 4) f_h$$

$$\Rightarrow \quad N \geq \frac{2f_h}{F}$$

P71：在自变量为t和f的情况下，在一个域中对函数进行取样，必是另一个域中函数的周期。

关键字：模拟域谱间距；数字域谱间距



§ 3-7 用DFT对连续时间信号逼近的问题

$\forall F$ —— 频率分辨率

$\because$ DFT的 $F = \dfrac{1}{NT} = \dfrac{f_s}{N}$

$$\left(\mathbf{Q}\Delta w = \frac{2p}{N} \rightarrow \Delta f = \frac{1}{N},\ \Delta\Omega = \frac{\Delta w}{T},\ \Delta f_a = \frac{\Delta\Omega}{2p} = \frac{1}{NT} \right)$$

数字域　　　　模拟域

$f_s \geq 2 f_h$ 或 $T \leq \dfrac{1}{2 f_h}$

$\therefore N \geq \dfrac{2 f_h}{F} \quad \left(\mathbf{Q} N = \dfrac{f_s}{F} \right)$

注意：

$$\forall t_p = NT \Longrightarrow F = \frac{1}{NT} = \frac{1}{t_p} \text{ 不变}$$

$$\downarrow$$

$$N\uparrow \longrightarrow T\downarrow \longrightarrow f_s\uparrow \longrightarrow \frac{f_s}{N}$$

§3-7 用DFT对连续时间信号逼近的问题

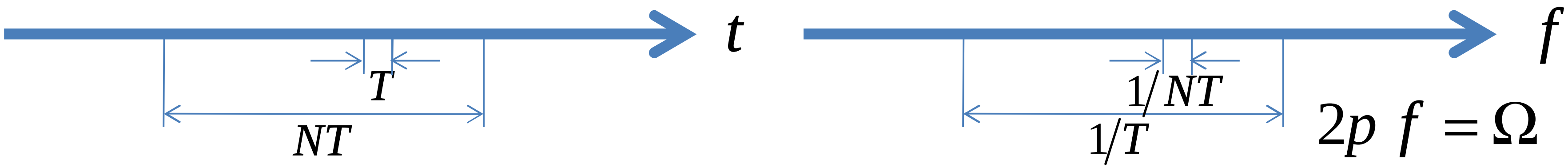
例：P101

例题：习题集P47-13

频谱分析的模拟信号以8kHz被抽样，计算了512个抽样的DFT，试确定频谱抽样之间的频率间隔。

解：

由下图



$$2\pi f = \Omega$$

$$\text{频域抽样间隔} f_0 = \frac{1}{NT} = \frac{8k}{512} = 15.6Hz$$

思考2:

课本P101上说：“信号的频率分辨率F和最小记录长度t_p成反比”。

$$F=1/\ t_p \qquad (3\text{-}110)$$

有同学问：如果示波器采样时间持续1s，以100Ms/s(每秒采样100M次)的采样速率对信号采样，最小记录长度t_p =1s，根据公式（3-110），那么无论怎么设置采样率，频率分辨率都是1Hz。若需要对信号进行实时高精度测频，如何实现。

解释：示波器内部往往每一通道有一定深度的存储FIFO，即示波器可以以100Ms/s 持续采集FIFO空间深度的数据。也即N是常数。

$$t_p = 1/F = N/f_s$$

提高采样率fs， t_p增加， F减小。

若需要对信号进行高精度测频，分辨率0.01Hz，信号最高频率100Hz，根据采样定理，先选择合适采样率，如400Hz/s，根据上述公式，N>10k， t_p =100s。

如何实时处理，这是个难题。我们的经验，可以先预估信号频点，采用DFT，在信号频点附近计算若干点的DFT。

§3-7 用DFT对连续时间信号逼近的问题

二、栅栏效应

$$X(k) \approx X_a(e^{jw})\Big|_{w=\frac{2p}{N}k, 0\le k\le N-1}$$

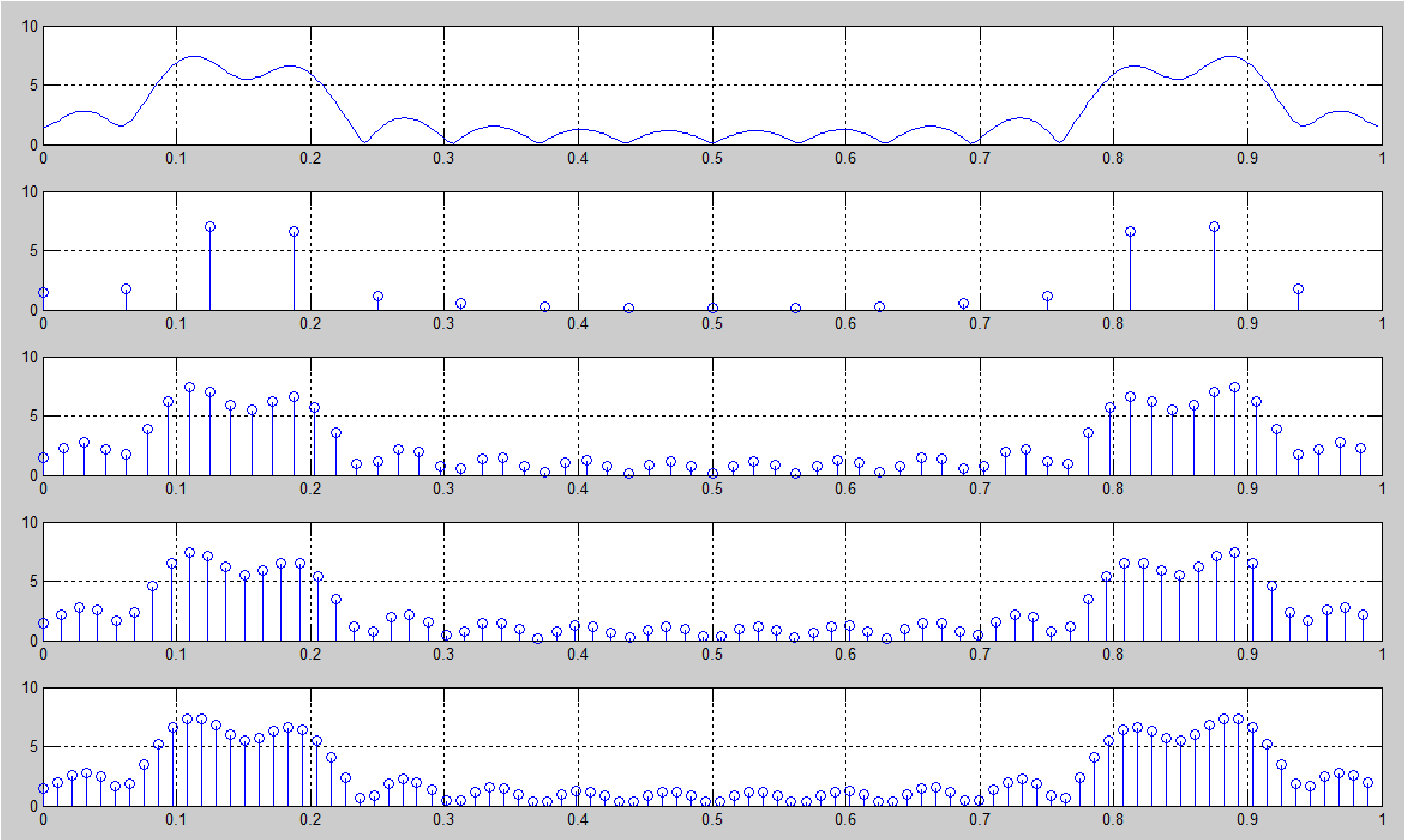
办法：对 $x(n)$ 通过补零加长。

注意：补零不能提高分辨力！

延长序列的DFT (不是2的整数次幂)

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.35*pi*n)； n=0:15;

补零到64点，73点，93点，作DFT运算

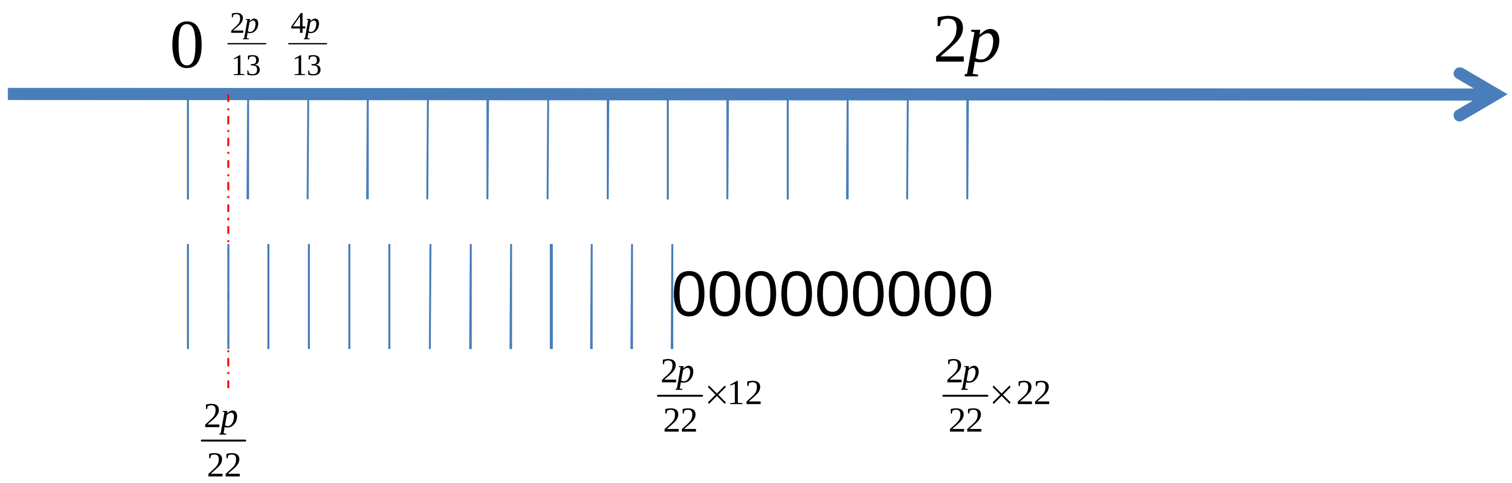


历年考试真题

设有限长序列$x(n), 0 \le n \le 12$, 令$X(e^{jw})$表示$x(n)$的离散时间傅里叶变换$DTFT$，如果希望通过计算一个M点DFT来求出$w = p/11$处$X(e^{jw})$的值，试确定最小可能的正整数M，并给出一种利用M点DFT求出$w = p/11$处$X(e^{jw})$的值的方法。

历年考试真题

设有限长序列$x(n), 0 \le n \le 12$, 令$X(e^{jw})$表示$x(n)$的离散时间傅里叶变换*DTFT*，如果希望通过计算一个M点DFT来求出$w = p/11$处$X(e^{jw})$的值，试确定最小可能的正整数M，并给出一种利用M点DFT求出$w = p/11$处$X(e^{jw})$的值的方法。



$$0 < w = \frac{2p}{22} < \frac{2p}{13}$$

§3-7 用DFT对连续时间信号逼近的问题

三、频谱泄露现象

$$x_a(nT) \to x(n), 0 \le n \le N-1$$

$$\downarrow$$

$$x_a(nT)R_N(n) \xleftrightarrow{FT} X_a(e^{jw}) \tilde{\otimes} R_N(e^{jw})$$

$$\downarrow \textbf{DFT} \qquad w = \frac{2p}{N}k$$

$$X(k) = X_a(k) \otimes R_N(k)$$

$\mathbf{Q}\, R_N(k)$并非d（k)

$\therefore X_a(k)$ 中的的频谱被展宽→泄漏

解决办法：选择谱特性更接近$d(k)$ 的窗函数

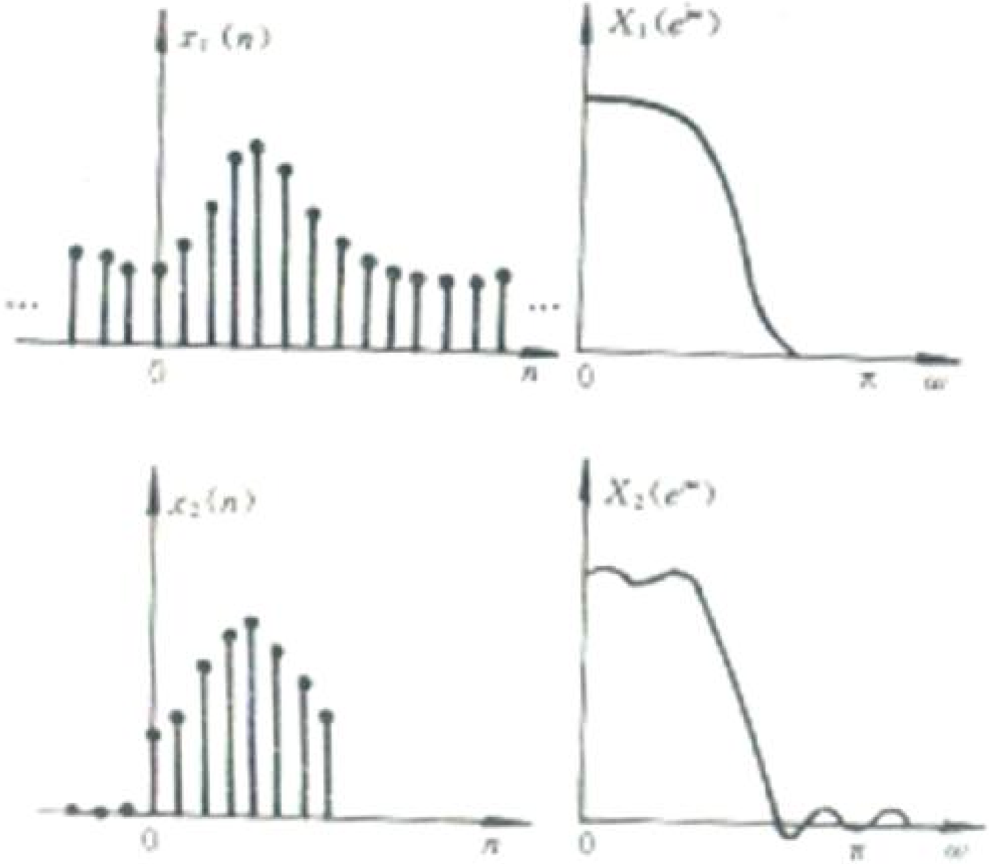


图 3－23　信号截断时产生的频谱泄漏现象