§3-5 离散傅里叶变换的性质

$$X'(k) = DFT\left[x'(n)\right]$$

$$H'(k) = DFT\left[h'(n)\right]$$

$$x(n) * h(n) = IDFT\left[X'(k)H'(k)\right]$$

$$\left(x'(n) \otimes h'(n)\right) \qquad 0 \le n \le L-1$$

如果$N >> M$　？

§3-5 离散傅里叶变换的性质

重叠相加/保留法　　　　　　　　　　　　　　　　如果$N >> M$　？

则 $x(n)=\sum_{k=0}^{+\infty} x_k(n) \qquad n \geq 0$

令 $x_k(n)=\begin{cases} x(n) & kL \leq n \leq (k+1)L-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$　(3-56)

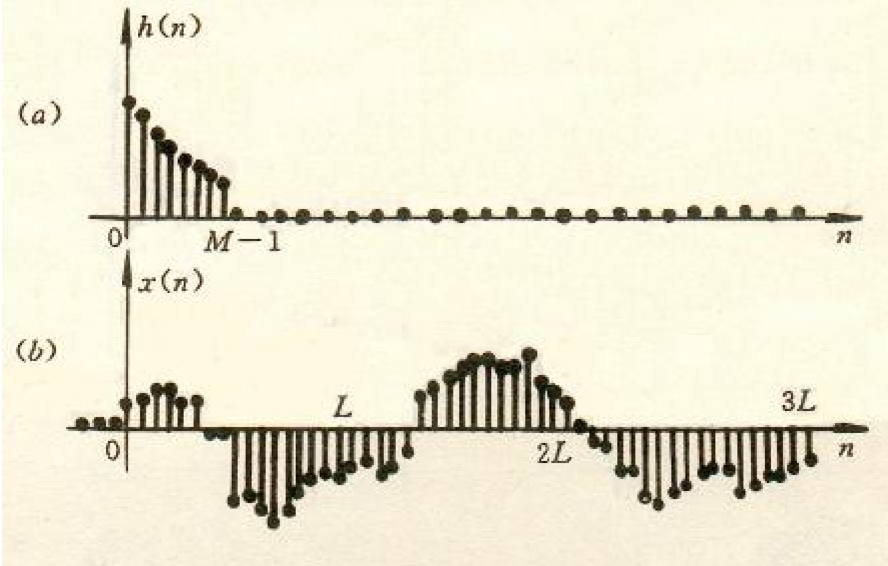


图 3—12　有限列长的单位取样响应及待处理的信号

(a) 单位取样响应 $h(n)$；(b) 待处理的信号 $x(n)$

$$x(n)*h(n)=\sum_{k=0}^{+\infty} x_k(n)*h(n)=\sum_{k=0}^{+\infty} y_k(n) \qquad (3\text{-}57)$$

§3-5 离散傅里叶变换的性质

重叠相加法图示

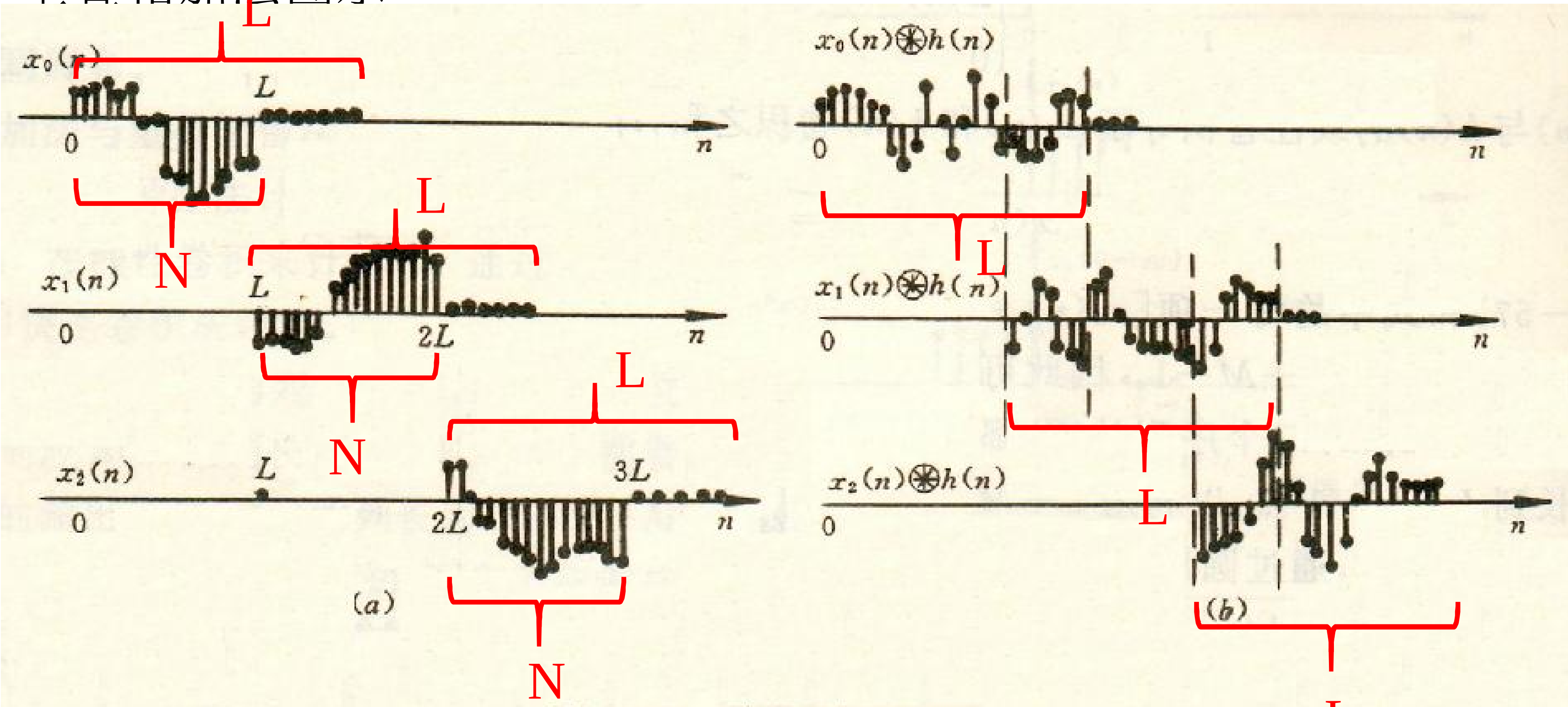


图 3—13　重叠相加法图形

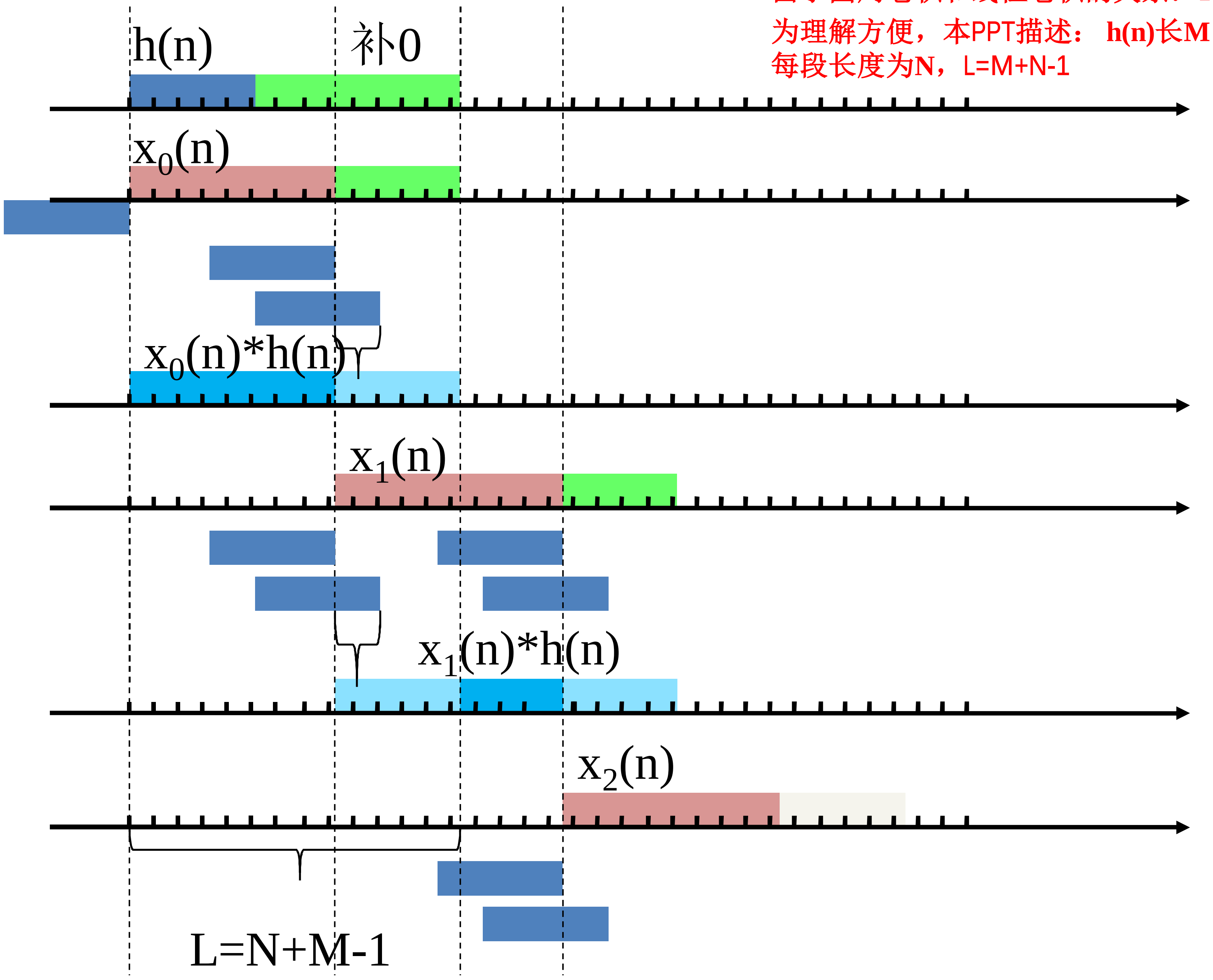
(a) 将 $x(n)$分解为列长为 L 的不重叠的几段　(b) 每段 $x_k(n)$和 $h(n)$卷积的结果

课本描述：h(n)长M，x(n)分解每段长度为L。

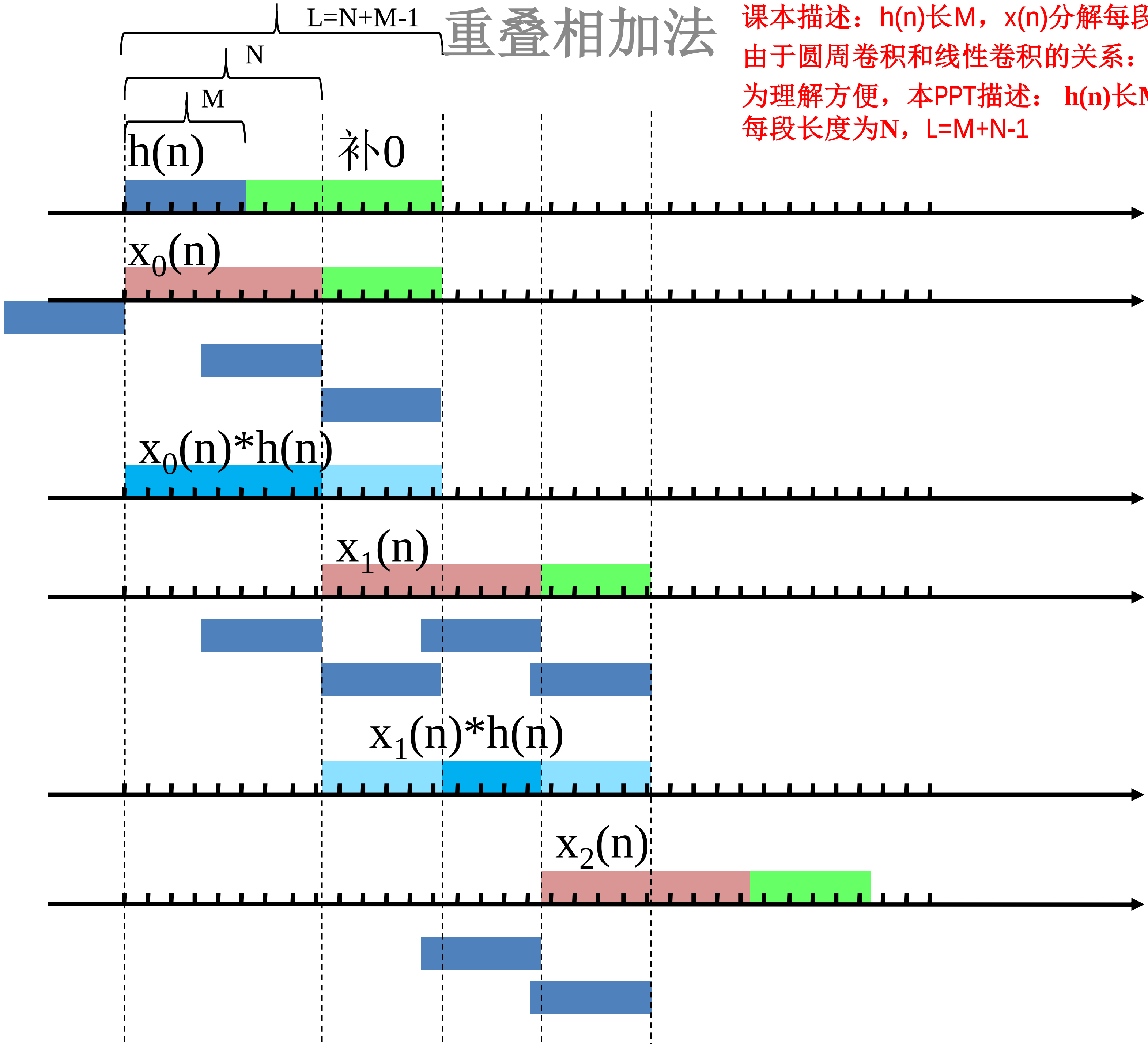
由于圆周卷积和线性卷积的关系：L>=M+N-1

为理解方便，本PPT描述：**h(n)长M，x(n)**分解每段长度为N，L=M+N-1

课本描述：h(n)长M，x(n)分解每段长度为L。
由于圆周卷积和线性卷积的关系：L>=M+N-1
为理解方便，本PPT描述：**h(n)长M，x(n)**分解每段长度为**N**，L=M+N-1



重叠相加法

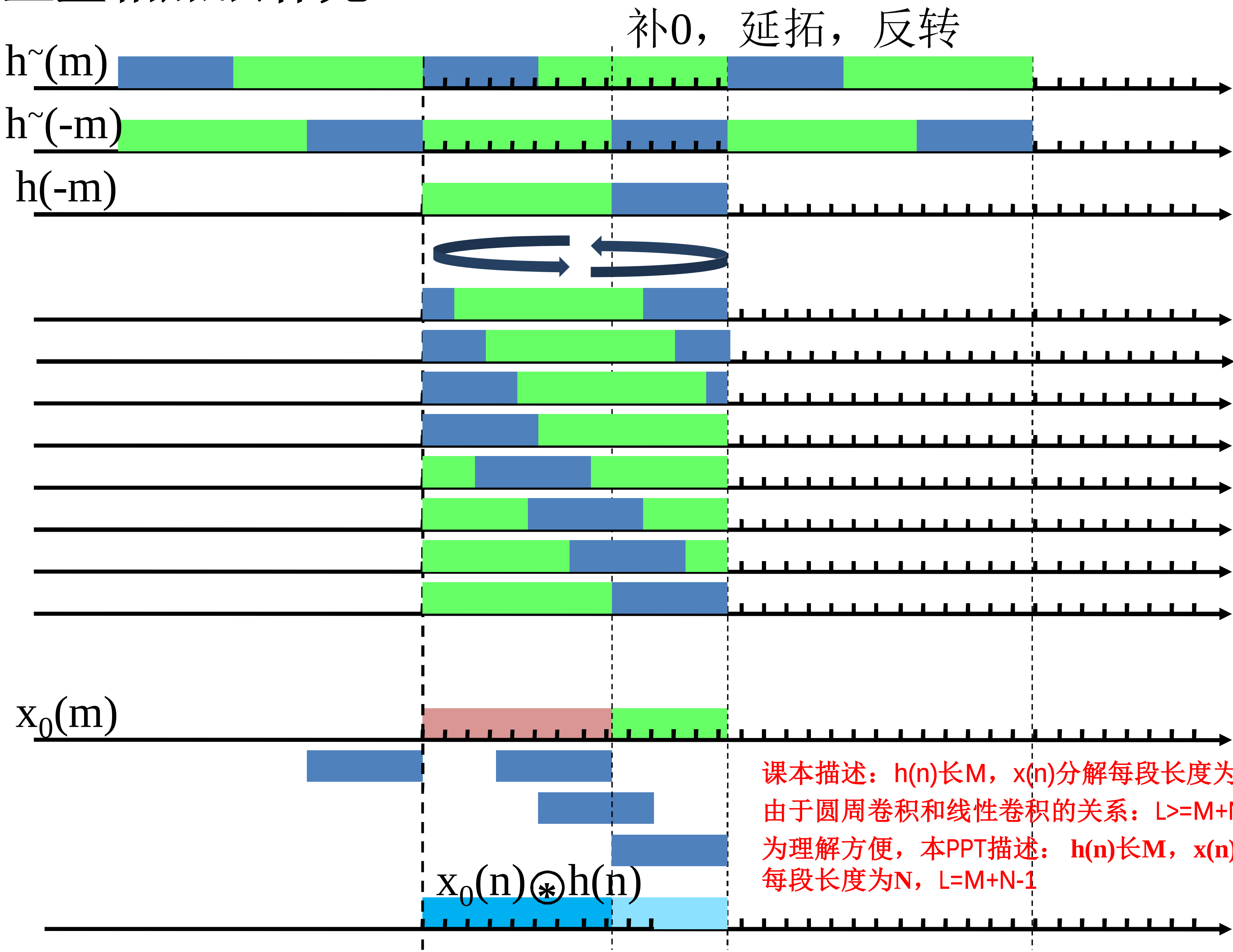


课本描述：h(n)长M，x(n)分解每段长度为L。

由于圆周卷积和线性卷积的关系：L>=M+N-1

为理解方便，本PPT描述：**h(n)长M，x(n)**分解每段长度为**N**，L=M+N-1

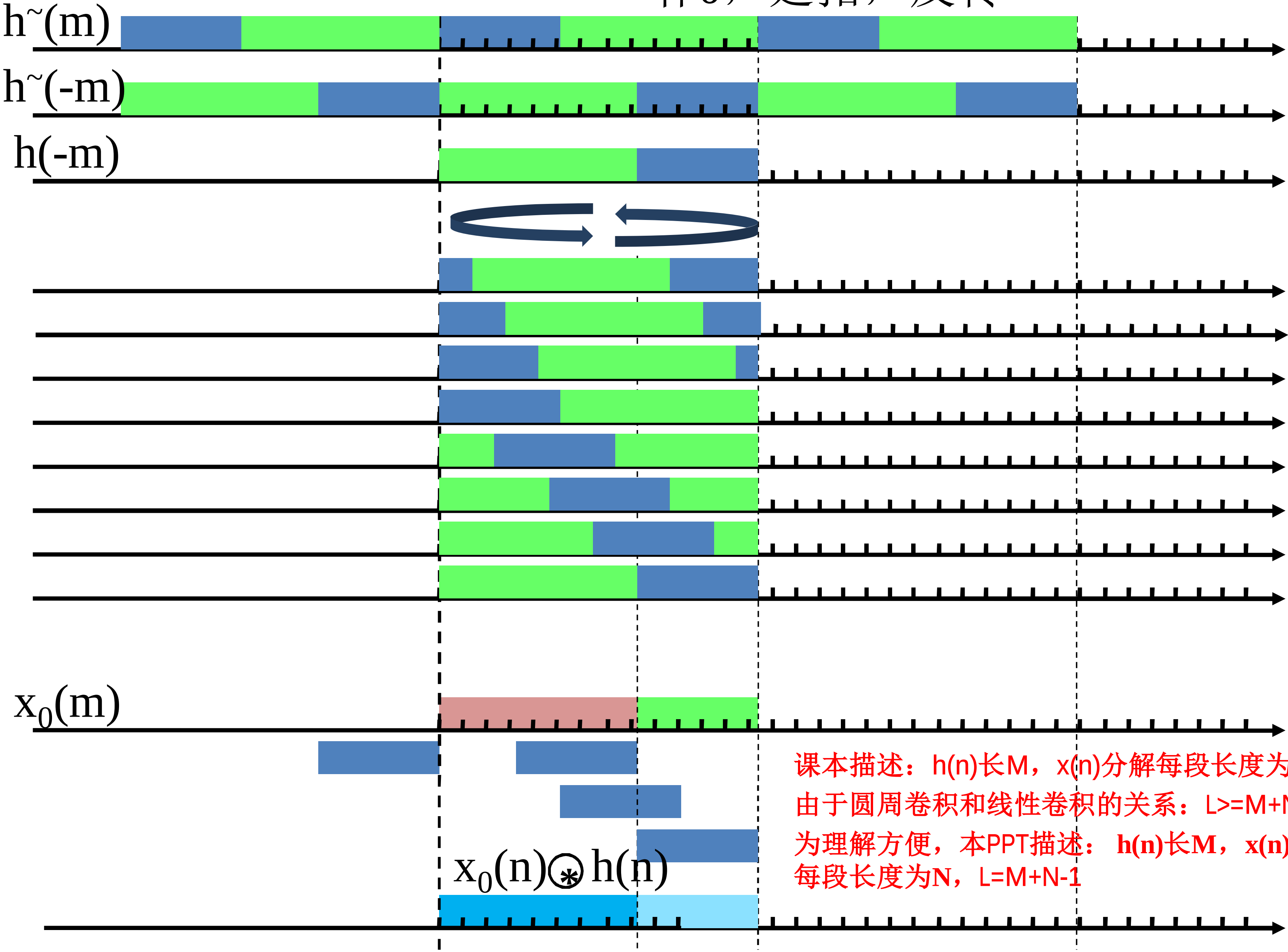
重叠相加法补充



课本描述：h(n)长M，x(n)分解每段长度为L。
由于圆周卷积和线性卷积的关系：L>=M+N-1
为理解方便，本PPT描述：**h(n)长M，x(n)**分解每段长度为N，L=M+N-1

（动画）重叠相加法补充

补0，延拓，反转



课本描述：h(n)长M，x(n)分解每段长度为L。
由于圆周卷积和线性卷积的关系：L>=M+N-1
为理解方便，本PPT描述：**h(n)长M，x(n)**分解每段长度为N，L=M+N-1

§3-5 离散傅里叶变换的性质

重叠保留法图示

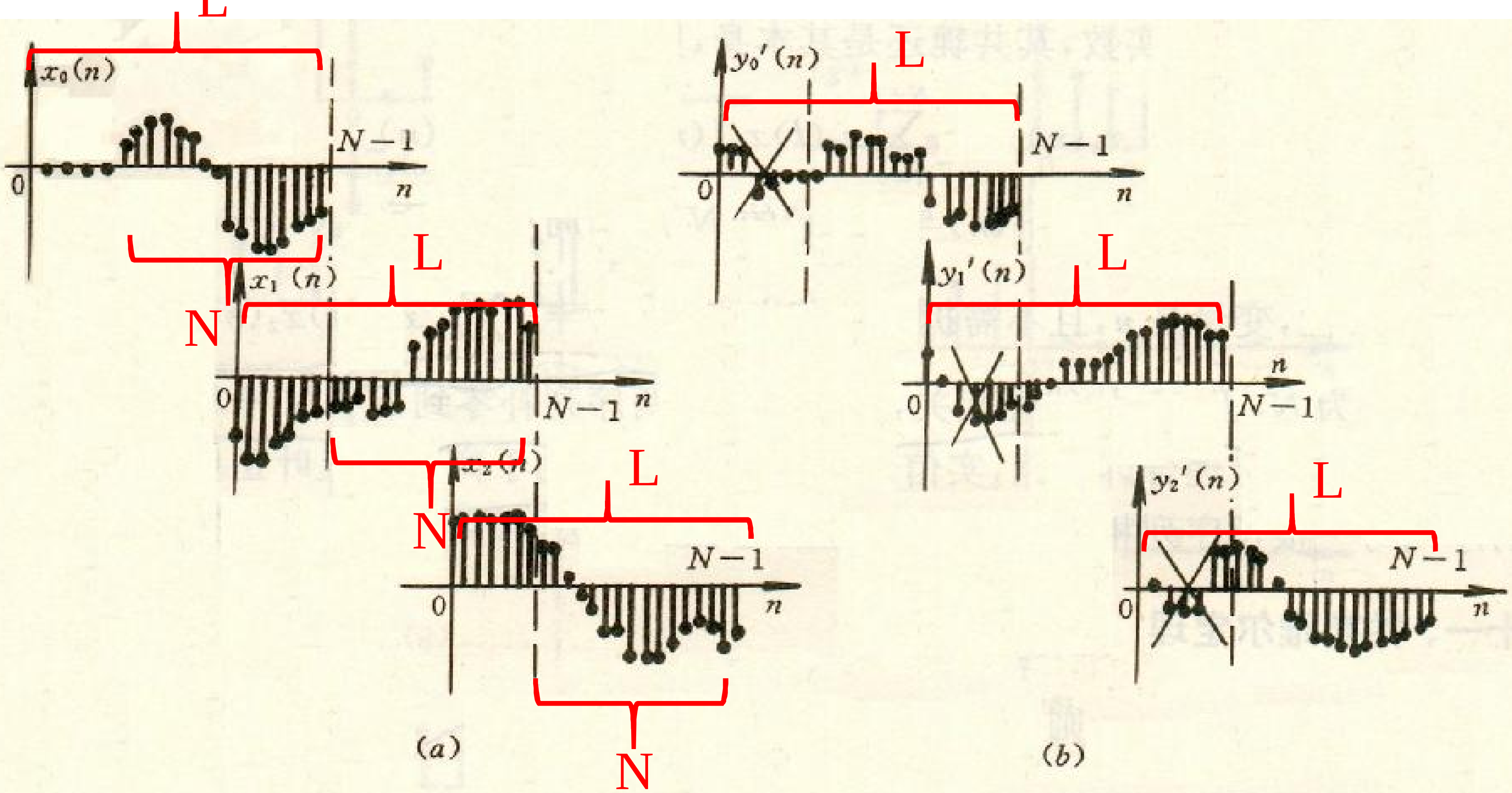
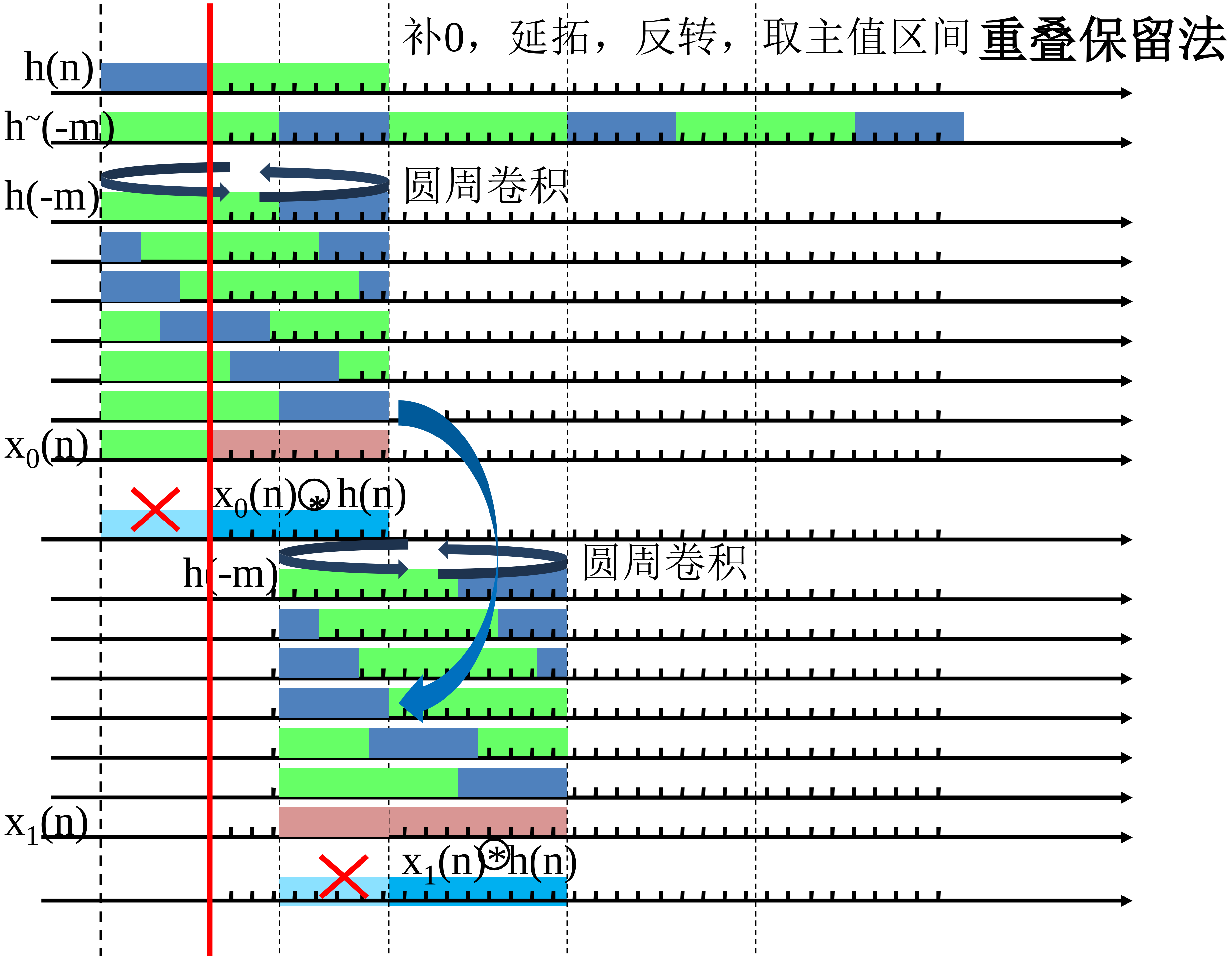
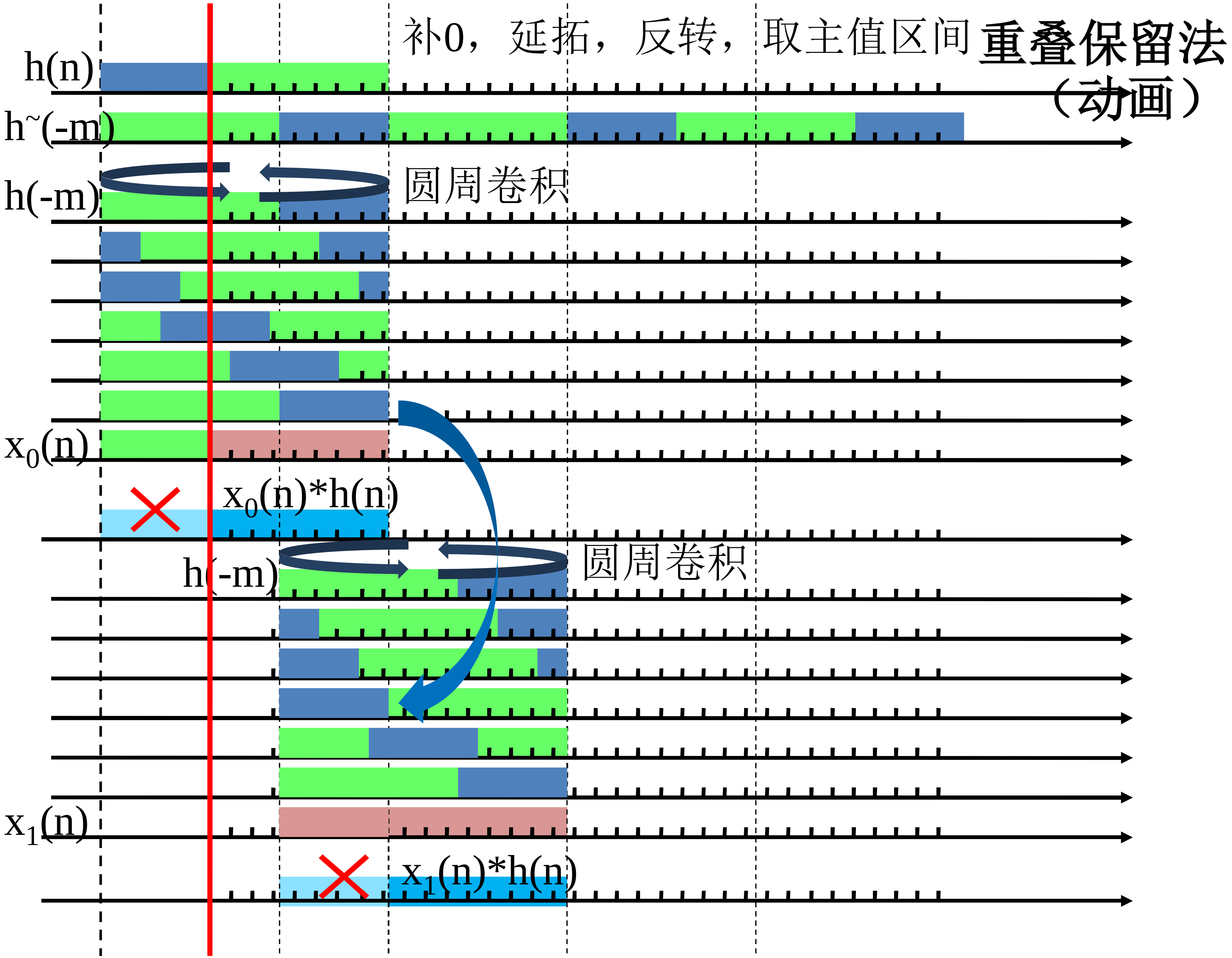


图 3—15 重叠保留法示意图

(a) $x(n)$分解为列长为 N 的重叠的几段

(b) 每一段与 $h(n)$圆周卷积的结果，图中标出在形成线性卷积时每一段要去掉的部分


补0，延拓，反转，取主值区间
重叠保留法
h(n)
h~(-m)
h(-m)
圆周卷积
x0(n)
x0(n)⊛h(n)
h(-m)
圆周卷积
x1(n)
x1(n)⊛h(n)



重叠保留法
（动画）
补0，延拓，反转，取主值区间
h(n)
h~(-m)
h(-m)
圆周卷积
x0(n)
x0(n)*h(n)
h(-m)
圆周卷积
x1(n)
x1(n)*h(n)

§3-5 离散傅里叶变换的性质

10.圆周（循环）相关定理

$$\forall x_1(n) \leftrightarrow X_1(k)$$

$$x_2(n) \leftrightarrow X_2(k)$$

$$X(k) = X_1^*(k) X_2(k)$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$x(n) = x_1^*(-n) \otimes x_2(n)$$

$$\because \tilde{X}_1^*(K) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{x}_1^*(-n)$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} x_1^*(l) x_2\left((l+n)\right)_N R_N(n)$$

其中$0 \le l \le N-1$

§3-5 离散傅里叶变换的性质

11.帕斯维尔（Parseval）定理 (能量定理)

$$\forall x(n) \leftrightarrow X(k)$$

则 $$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \left|X(k)\right|^2$$

§3-5 离散傅里叶变换的性质

12.DFT的对称性

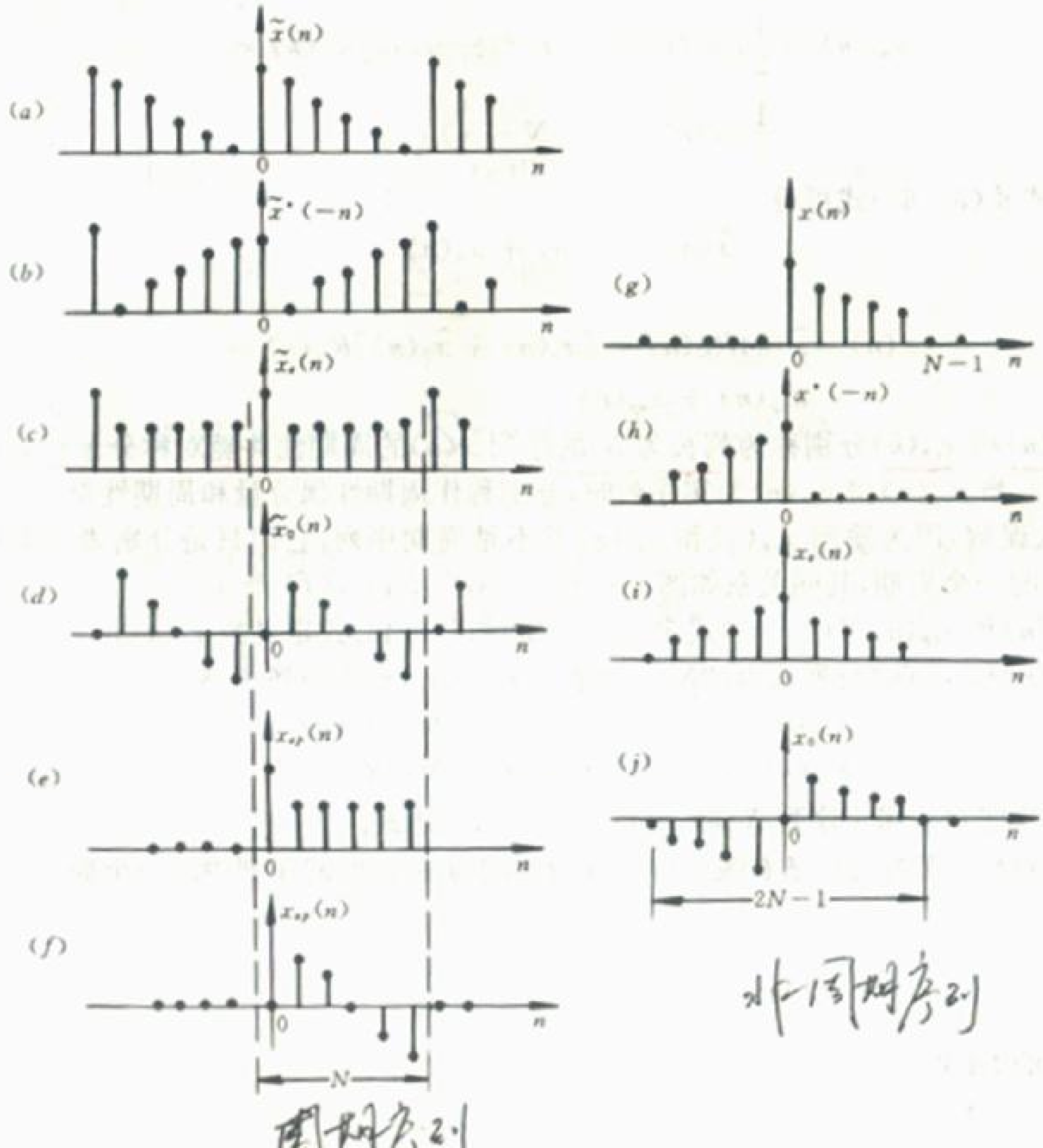
回忆对称序列长度、周期问题

周期序列$\tilde{x}(n) = x((n))_N$

共轭对称分量：$\tilde{x}_e(n) = \dfrac{1}{2}\left[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)\right]$

共轭反对称分量：$\tilde{x}_o(n) = \dfrac{1}{2}\left[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)\right]$

非周期序列？



(a) $\tilde{x}(n)$
(b) $\tilde{x}^*(-n)$
(c) $\tilde{x}_e(n)$
(d) $\tilde{x}_o(n)$
(e) $x_{ep}(n)$
(f) $x_{op}(n)$
N
周期序列
(g) $x(n)$
$N-1$
(h) $x^*(-n)$
(i) $x_e(n)$
(j) $x_o(n)$
$2N-1$
非周期序列

§3-5 离散傅里叶变换的性质

12.DFT的对称性

周期序列$\tilde{x}(n)=x((n))_N$

共轭对称分量：$\tilde{x}_e(n)=\dfrac{1}{2}\left[\tilde{x}(n)+\tilde{x}^*(-n)\right]$

共轭反对称分量：$\tilde{x}_o(n)=\dfrac{1}{2}\left[\tilde{x}(n)-\tilde{x}^*(-n)\right]$

取$0\sim N-1$一个周期

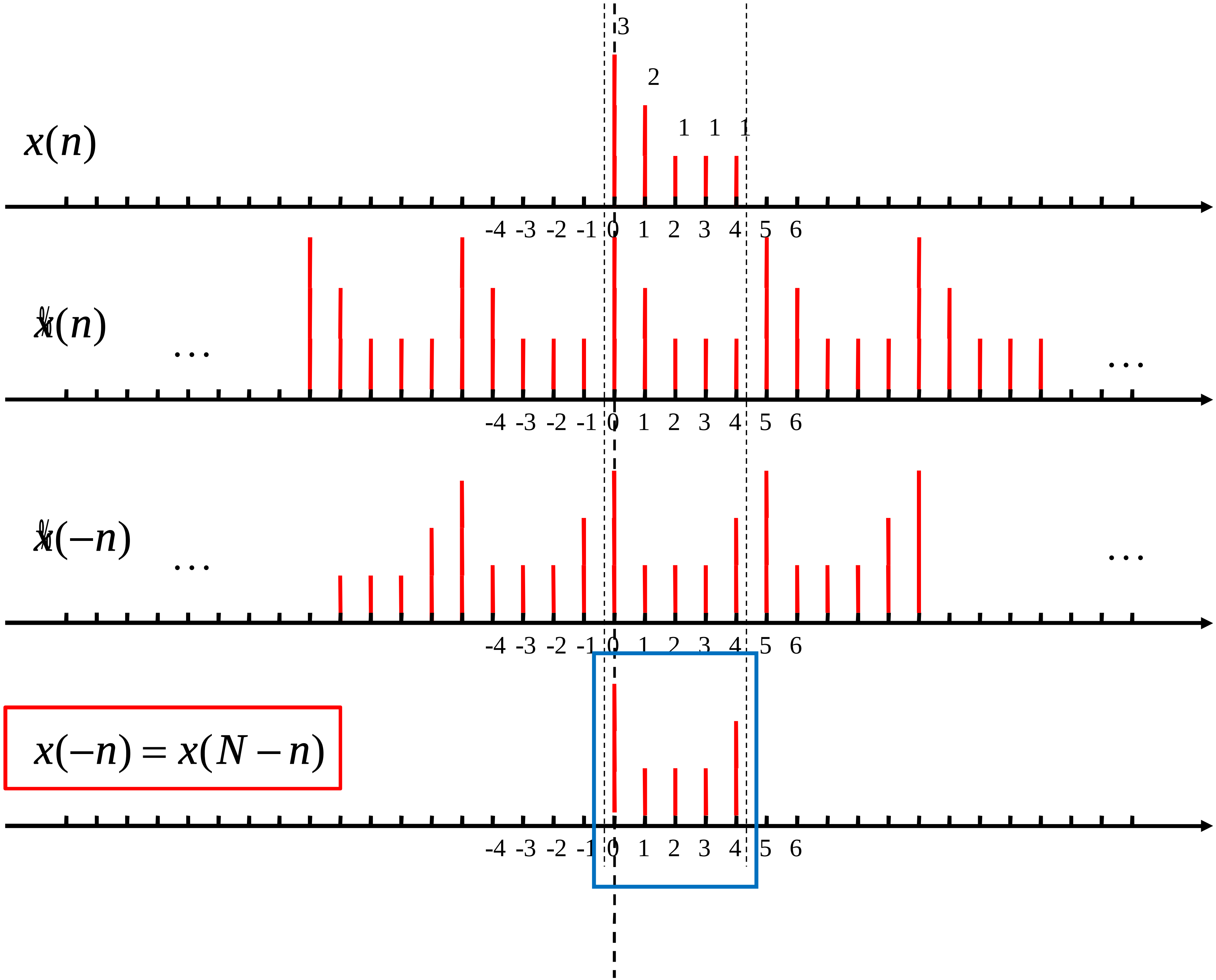
$$x_{ep}(n)=\frac{1}{2}\left[x((n))_N+x^*((-n))_N\right]R_N(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(N-n)\right]$$

$$x_{op}(n)=\frac{1}{2}\left[x((n))_N-x^*((-n))_N\right]R_N(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(N-n)\right]$$

$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)$$

$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)=\left[\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)\right]R_N(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$$

周期性共轭对称分量 周期性共轭反对称分量



$x(n)$
3
2
1 1 1
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
$\tilde{x}(n)$
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
$\tilde{x}(-n)$
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
$x(-n) = x(N-n)$
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

§3-5 离散傅里叶变换的性质

12.DFT的对称性

奇序列的*DFT*

偶序列的*DFT*

共轭复序列的*DFT*

复数序列的*DFT*

虚序列的*DFT*

实序列的*DFT*

§3-5 离散傅里叶变换的性质

$\boxed{\text{奇序列的}DFT}$

$$x(n) = -x(-n) = -x(N-n)$$

$$\Rightarrow X(k) = -X(-k) = -X(N-k)$$

$\boxed{\text{偶序列的}DFT}$

$$x(n) = x(-n) = x(N-n)$$

$$\Rightarrow X(k) = X(-k) = X(N-k)$$

$\boxed{\text{共轭复序列的}DFT}$

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(N-k)$$

§3-5 离散傅里叶变换的性质

复数序列的*DFT*

$$x(n)=x_r(n)+jx_i(n)$$

$$\begin{cases} x_r(n)=\dfrac{1}{2}\left[x(n)+x^*(n)\right] \\ jx_i(n)=\dfrac{1}{2}\left[x(n)-x^*(n)\right] \end{cases}$$

$$DFT\left[x_r(n)\right]=\frac{1}{2}DFT\left[x(n)+x^*(n)\right]=\frac{1}{2}\left[X(k)+X^*(N-k)\right]=X_{ep}(k)$$

$$DFT\left[jx_i(n)\right]=\frac{1}{2}DFT\left[x(n)-x^*(n)\right]=\frac{1}{2}\left[X(k)-X^*(N-k)\right]=X_{op}(k)$$

$$X(k)=X_{ep}(k)+X_{op}(k)$$

周期性共轭对称分量 周期性共轭反对称分量

§3-5 离散傅里叶变换的性质

复数序列的DFT

$$X_{ep}^{*}(N-k)=\frac{1}{2}\left[X(N-k)+X^{*}(N-N+k)\right]^{*}$$

$$=\frac{1}{2}\left[X(N-k)+X^{*}(k)\right]^{*}$$

$$\Rightarrow X_{ep}(k)=X_{ep}^{*}(N-k)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left|X_{ep}(k)\right|=\left|X_{ep}(N-k)\right|\\ \arg\left[X_{ep}(k)\right]=-\arg\left[X_{ep}(N-k)\right]\end{cases}$$

实部相等，虚部相反

实部为偶，虚部为奇

周期性共轭对称分量 周期性共轭反对称分量

§3-5 离散傅里叶变换的性质

$$X_{op}(k) = -X_{op}^{*}(N-k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|X_{op}(k)\right| = -\left|X_{op}(N-k)\right| \\ \arg\left[X_{op}(k)\right] = \arg\left[X_{op}(N-k)\right] \end{cases}$$

实部相反，虚部相等

实部为奇，虚部为偶

§3-5 离散傅里叶变换的性质

把两个实数序列$x_1(n)$和$x_2(n)$组合为单一的复数函数$x(n)$，当算出复数表示的$X(k)$后，可以将$X(k)$分成两个独立的分量$X_{ep}(k)$和$X_{op}(k)$，它们分别对应于$x_1(n)$和$x_2(n)$的**DFT**。在一次计算中可以得到两个独立信号的变换。

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

复数序列的$IDFT$

$$X(k)=X_r(k)+jX_i(k)$$

$$\begin{cases} X_r(k)=\dfrac{1}{2}\left[X(k)+X^*(k)\right] \\ jX_i(k)=\dfrac{1}{2}\left[X(k)-X^*(k)\right] \end{cases}$$

$$IDFT\left[X_r(k)\right]=\frac{1}{2}IDFT\left[X(k)+X^*(k)\right]=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(N-n)\right]=x_{ep}(n)$$

$$IDFT\left[jX_i(k)\right]=\frac{1}{2}IDFT\left[X(k)-X^*(k)\right]=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(N-n)\right]=x_{op}(n)$$

$$x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$$

§3-5 离散傅里叶变换的性质

虚序列的DFT

$$x(n) = jx_i(n)$$

$$X(k) = X_{op}(k)$$

实序列的DFT

$$x(n) = x_r(n)$$

$$X(k) = X_{ep}(k)$$

上述两种情况不论哪一种都只要知道一半数目的$X(k)$，利用对称性质就可得到另一半数目的$X(k)$。在**DFT**运算中利用这个特点，可以提高运算效率。

§3-5 离散傅里叶变换的性质

x(n)	X(k)
偶序列	偶序列
奇序列	奇序列
实	实部为偶，虚部为奇
虚	实部为奇，虚部为偶
实偶	实偶
实奇	虚奇
虚偶	虚偶
虚奇	实奇
实部为偶，虚部为奇 实部为奇，虚部为偶	实 虚

已知4点复序列$c(n)=u(n)+jv(n)$的DFT为

$C(k)=\{10+2j,-2+2j,-2+2j,-2-2j\}$

$u(n)$和$v(n)$为两个实序列

(a)求序列$u(n)$和$v(n)$的4点DFT

(b)求序列$x(n)=u((2-n))R_4(n)$和$y(n)=v((n-1))R_4(n)$

(c)求序列$u(n)$和$v(n)$5点圆周卷积，与线性卷积哪些值结果相同，并说明原因；

(d)写出利用FFT求序列$u(n)$和$v(n)$线性卷积的步骤；

§3-5 离散傅里叶变换的性质

例：习题集P42-6，课本P119-4

§3-5 离散傅里叶变换的性质

13.DFT相当于横向滤波器

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)h_k(N-1-n)$$

$$h_k(n)\triangleq\begin{cases}W_N^{(N-1-n)k} & 0\le n\le N-1\\ 0 & n<0,n\ge N\end{cases}$$

P94

§3-5 离散傅里叶变换的性质

14.DFT与Z变换的关系

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2p}{N}kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}\Big|_{z=e^{j\frac{2p}{N}k}}$$

$$x(n)\xleftrightarrow{DFT}X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jwn}\Big|_{w=\frac{2p}{N}k,k=0,1,\cdots,N-1}$$

问题：

能否由 $X(k)\overset{\triangle}{=}X(e^{jw})\Big|_{w=\frac{2p}{N}k}\rightarrow x(n)$

（频域取样）

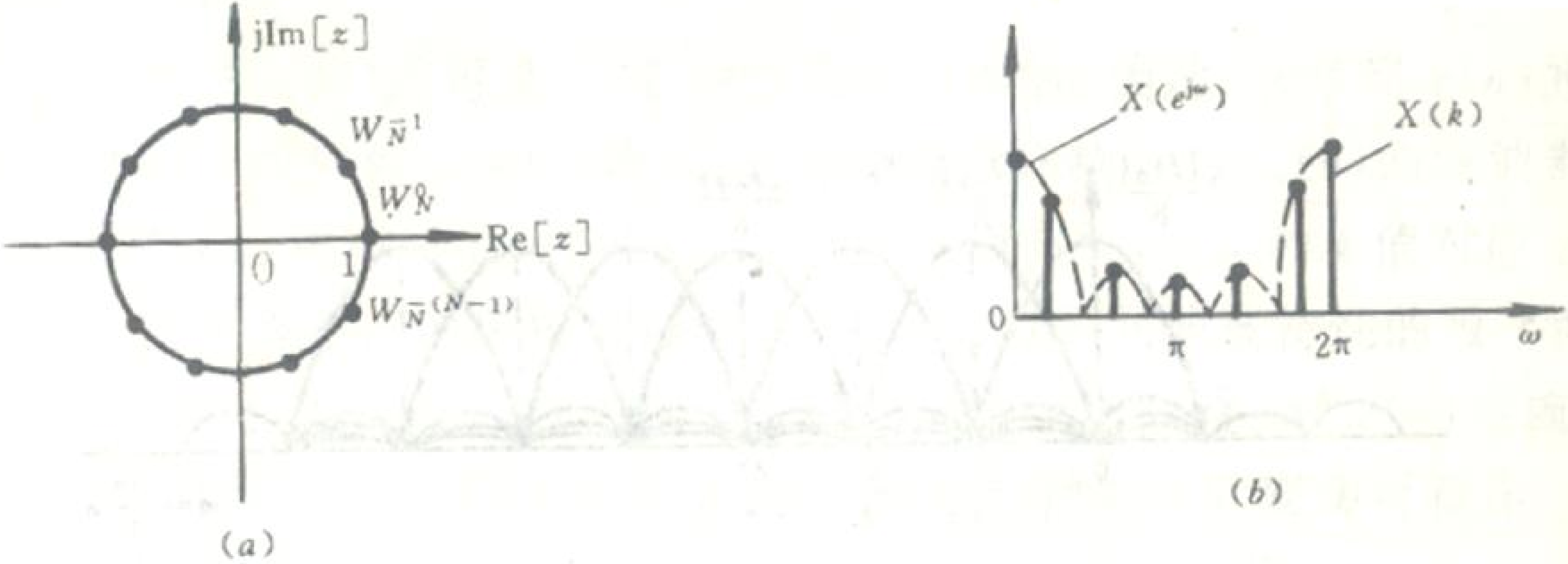


图 3－21　DFT 与 z 变换

(a) z 平面单位圆上等间隔取样的各点

(b) $X(k)$是序列傅氏变换 $X(e^{j\omega})$的取样值