

数字信号处理

周治国

2015.9



第三章

离散傅里叶变换

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

1. 线性特性

迭加原理

$$\begin{aligned}x_3(n) &= ax_1(n) + bx_2(n) \\ X_3(k) &= DFT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)\end{aligned}$$

2. 可用正变换计算逆变换

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{kn} \right]^* = \frac{1}{N} \{ DFT[X^*(k)] \}^*$$

3. 对称定理

$$\forall x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$$

$$\begin{aligned}\text{则} \quad \frac{1}{N} X(n) &\xleftrightarrow{DFT} x(-k) @ x(N-k) \\ 0 \leq n \leq N-1 &\quad 0 \leq k \leq N-1\end{aligned}$$

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

4. 反转定理

$$\forall x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$$

$$\text{则 } x(-n) \xleftrightarrow{DFT} X(-k)$$

5. 序列的总和

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) = X(k) \big|_{k=0} = X(0)$$

6. 序列的起始值

$$x(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

7. 序列加长后的DFT

$$\forall x(n), 0 \leq n \leq N-1 \longleftrightarrow X(k), 0 \leq k \leq N-1$$

令

$$g(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq mN-1 \end{cases} \quad \forall m \in I$$

问题:

$$G(k) \triangleq DFT[g(n)] \sim X(k)$$

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

由DFT的定义:

$$\begin{aligned} G(k) &= \sum_{n=0}^{mN-1} g(n) W_{mN}^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2p}{Nm} kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2p}{N} \frac{k}{m} n} \\ &= X\left(\frac{k}{m}\right) \triangleq X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2p}{N} \frac{k}{m}} \\ &\quad k = 0, 1, \dots, mN - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad X(k) &= X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2p}{N} k} \\ k &= 0, 1, \dots, N - 1 \\ X(e^{j\omega}) &\xleftrightarrow{DTFT} x(n) \end{aligned}$$

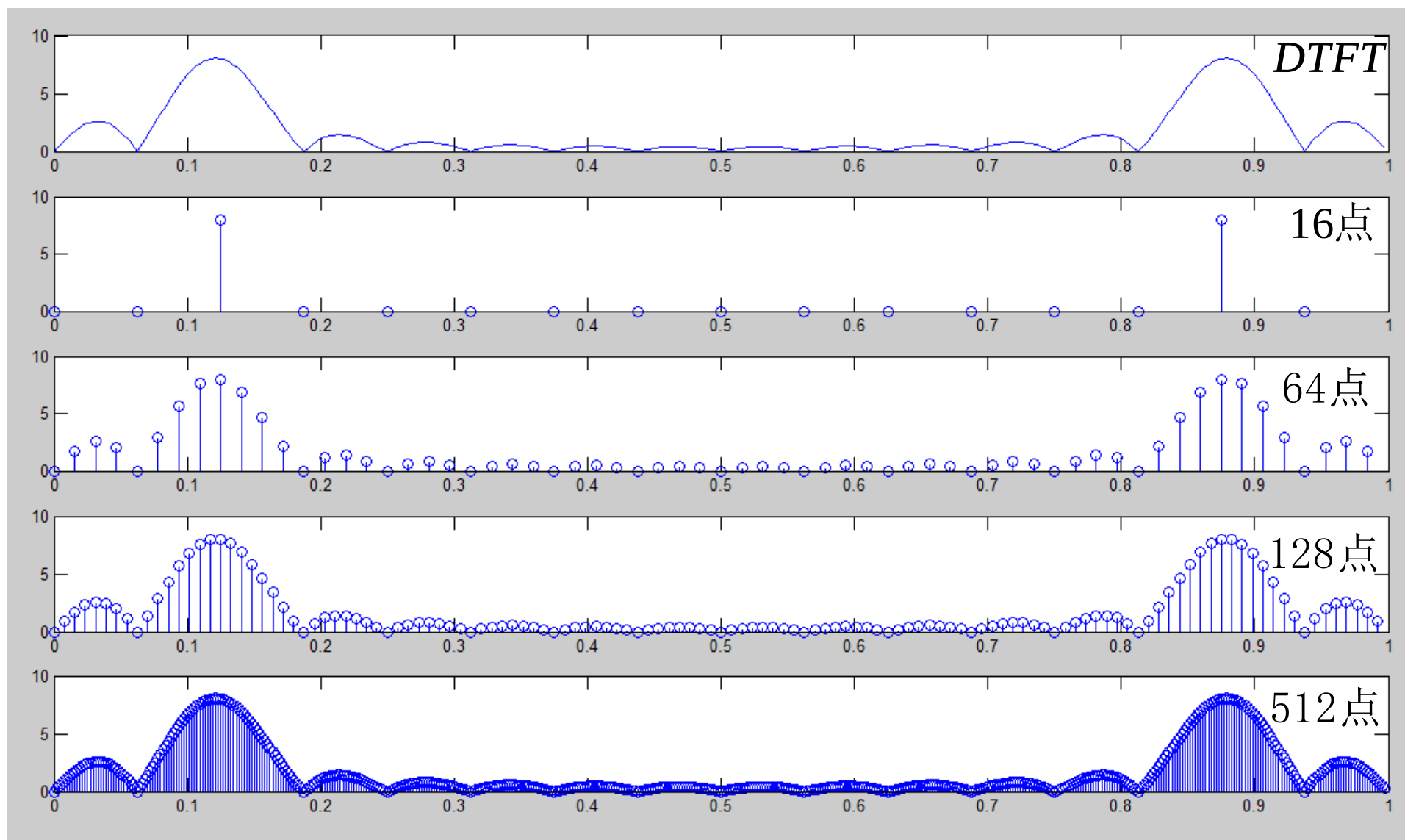
$\therefore G(k)$ 与 $X(k)$ 具有相同的形状, 不同之处是 $G(k)$ 的频谱间隔比 $X(k)$ 的小。即通过补零, 可以得到更加细致的频谱。

延长序列的DFT

序列 $x=\sin(0.25\pi n)$; $n=0:15$;

补零到64点, 128点, 512点, 作DFT运算

17?



```

>> n=0:15
x=sin(0.25*pi*n)
L1=0:15
dft_16=fft(x,16)
L2=0:63
dft_64=fft(x,64)
L3=0:127
dft_128=fft(x,128)
L4=0:511
dft_512=fft(x,512)

nx=0:15
K=512
dw=2*pi/K
k=0:511
X=x*exp(j*dw*nx'*k)
subplot(5,1,1)
plot(k*dw/(2*pi),abs(X))

subplot(5,1,2)
stem(L1/16,abs(dft_16))
subplot(5,1,3)
stem(L2/64,abs(dft_64))
subplot(5,1,4)
stem(L3/128,abs(dft_128))
subplot(5,1,5)
stem(L4/512,abs(dft_512))

```

思考：

1.检索“频率分辨力”和“频率分辨率”的区别，或“频率分辨率”的两重含义。

2.从下面仿真，延长序列能否提高频率分辨力？能否提高频率分辨率？

频率分辨力：是指分辨[输入信号](#)中两个[频率分量](#)最小间隔的能力，即把频率信号区分开来的能力。

注意关于“频率分辨率”的说法有两种含义：

一种是本课本中P101“设 F 表示频率分量间的增量，它就是前面提到的频率分辨率($F=fs/N$)”；

另外一种在很多其他参考书中是这么描述的：“注意：补零不能提高分辨率”。

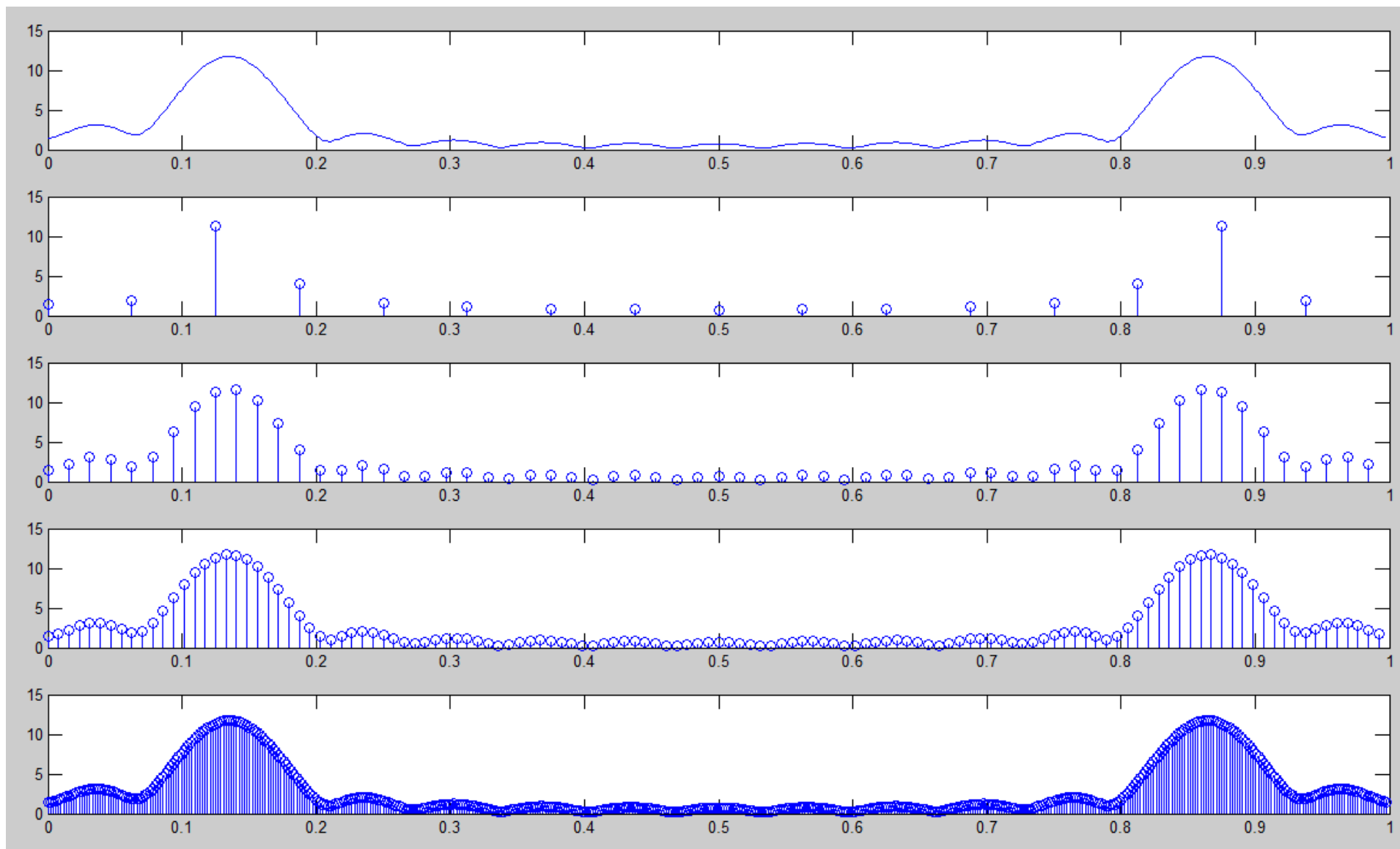
个人建议采用规范说法：“注意：补零不能提高分辨力”。

可以参考“程佩青《数字信号处理》”第二版P121，有关频率分辨力的描述。



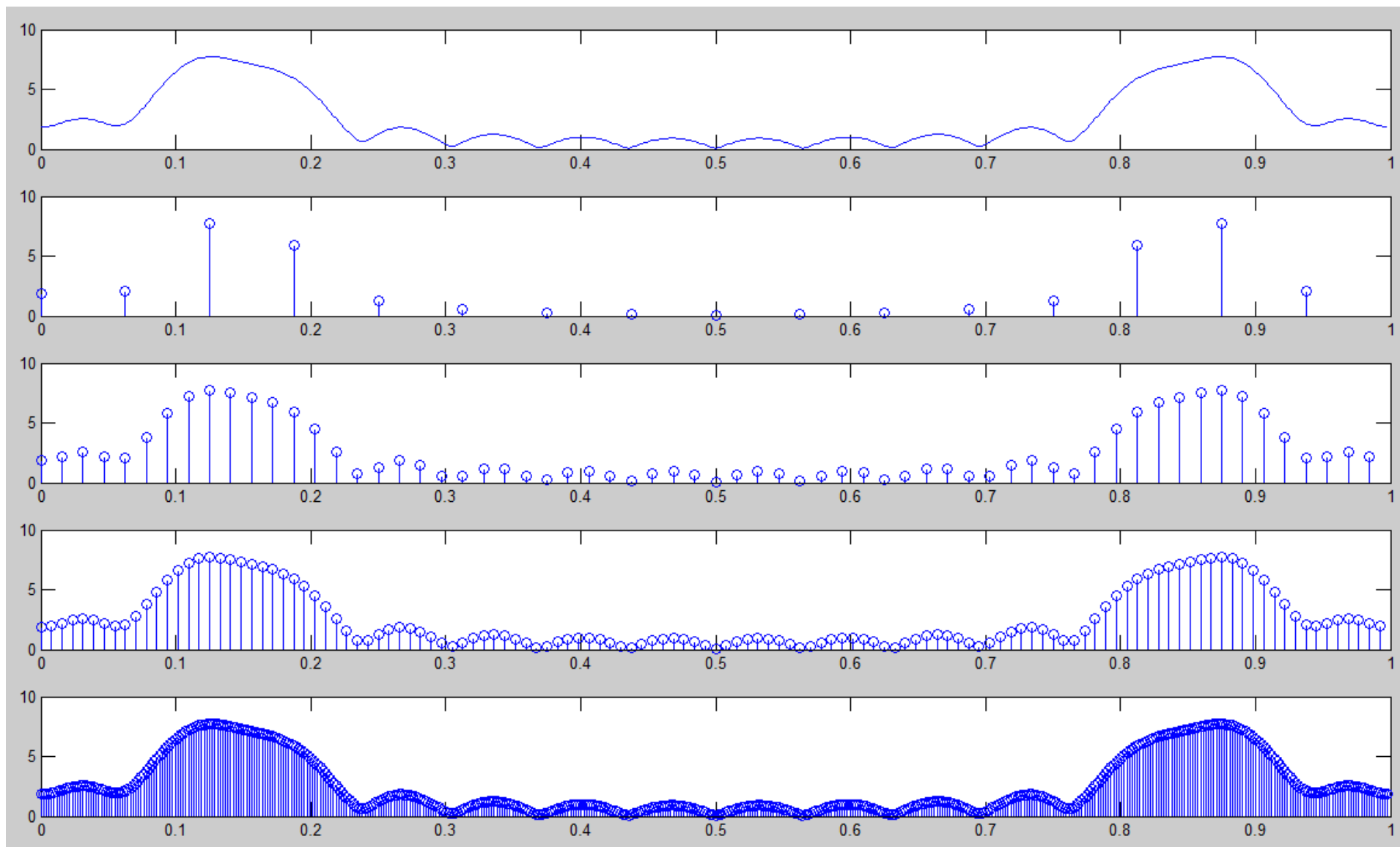
延长序列的DFT

序列 $x = \sin(0.25\pi n) + \sin(0.30\pi n)$; $n=0:15$;
补零到64点, 128点, 512点, 作DFT运算



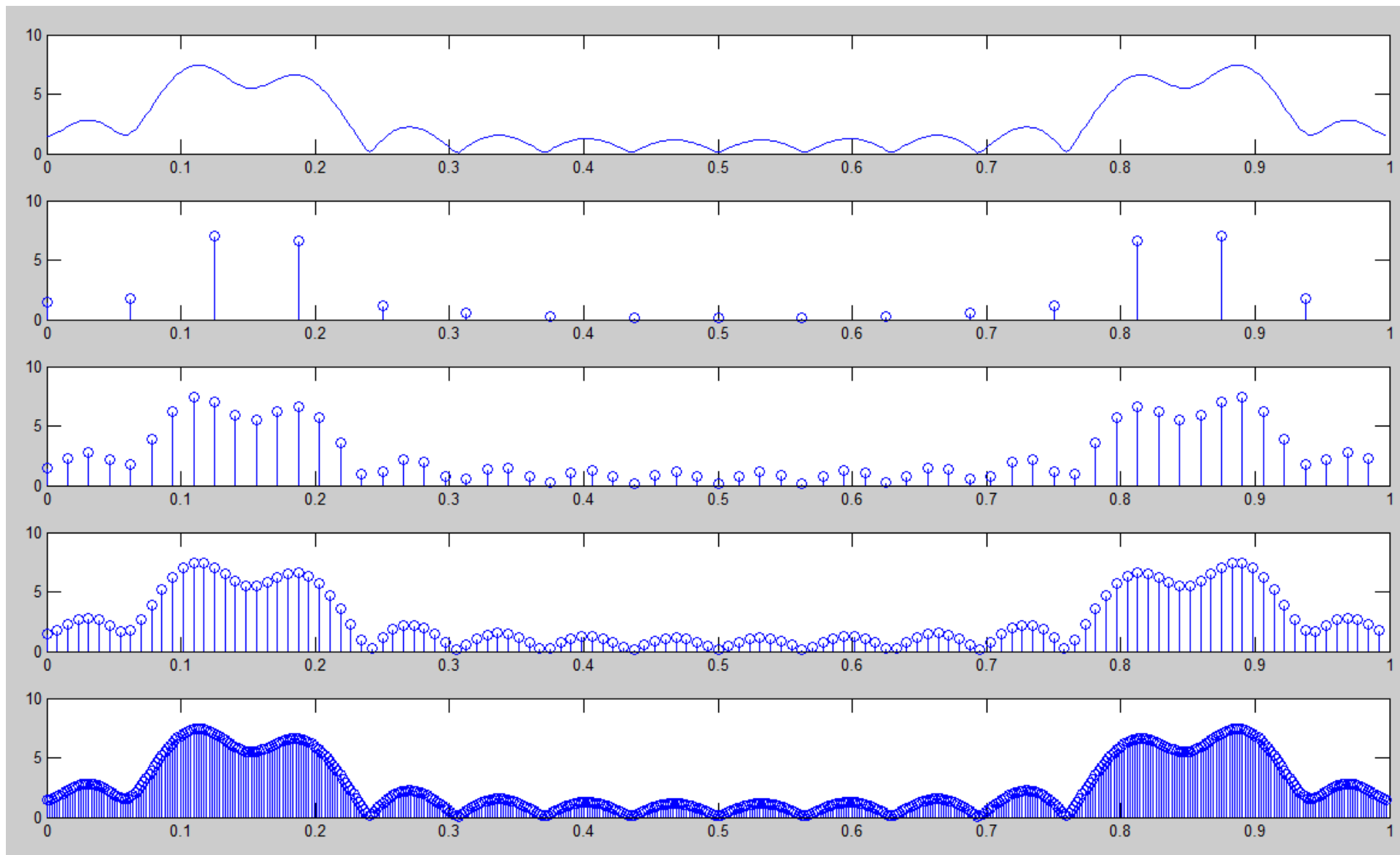
延长序列的DFT

序列 $x = \sin(0.25\pi n) + \sin(0.33\pi n)$; $n=0:15$;
补零到64点, 128点, 512点, 作DFT运算



延长序列的DFT

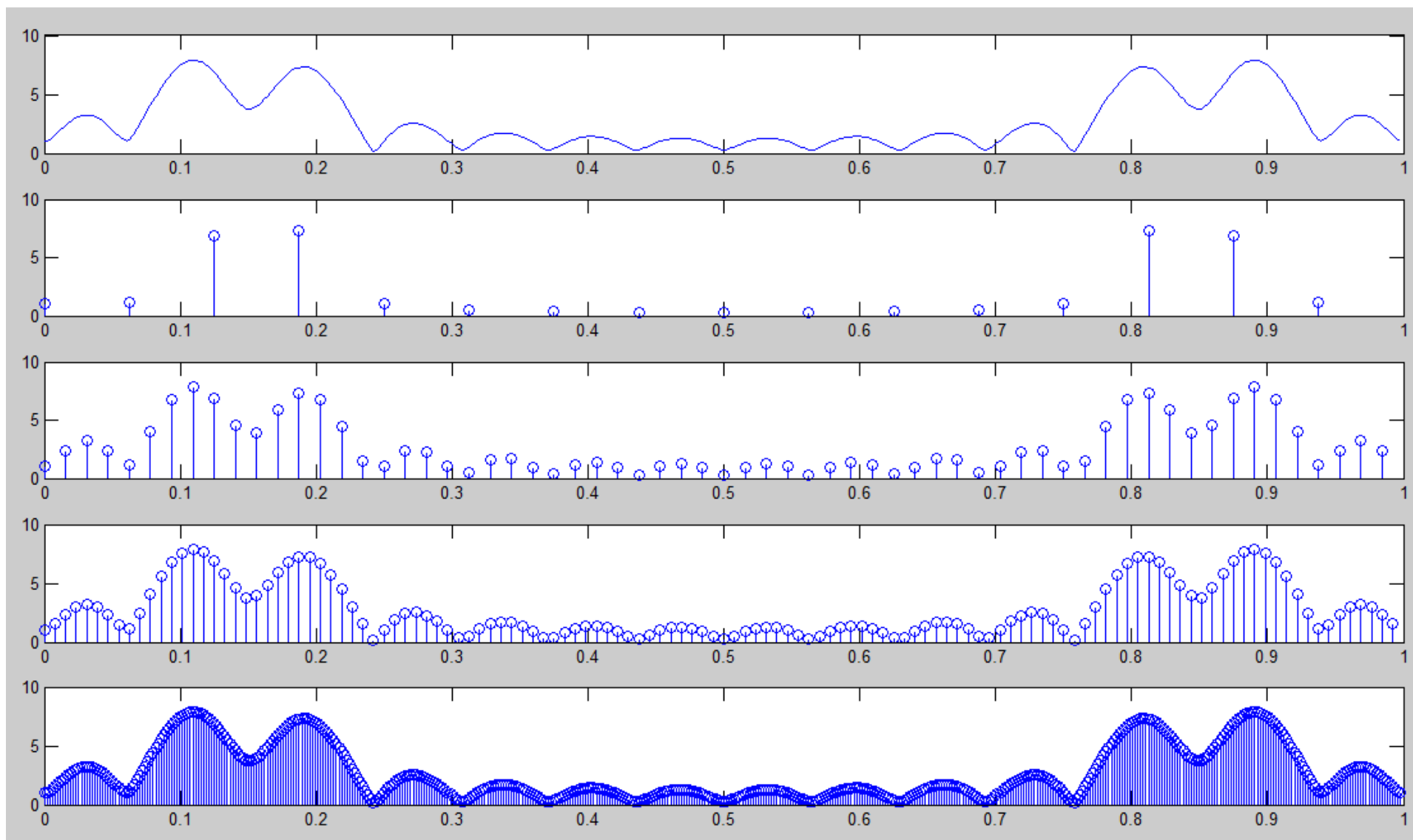
序列 $x = \sin(0.25\pi n) + \sin(0.34\pi n)$; $n=0:15$;
补零到64点, 128点, 512点, 作DFT运算



延长序列的DFT

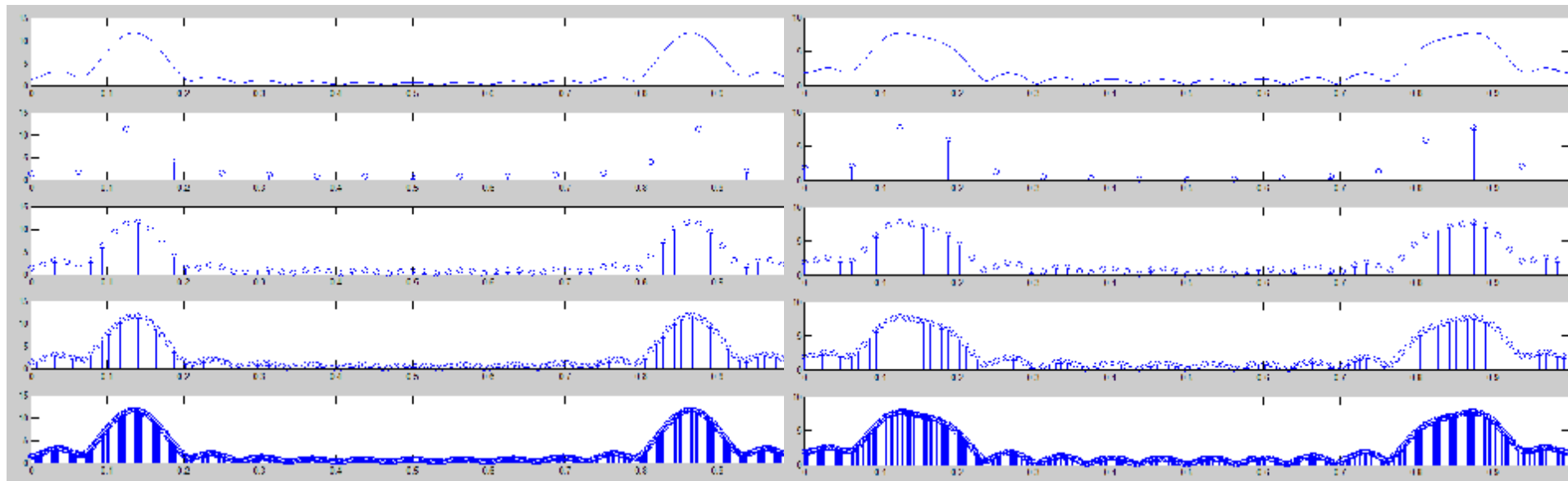
序列 $x = \sin(0.25\pi n) + \sin(0.35\pi n)$; $n=0:15$;

补零到64点, 128点, 512点, 作DFT运算



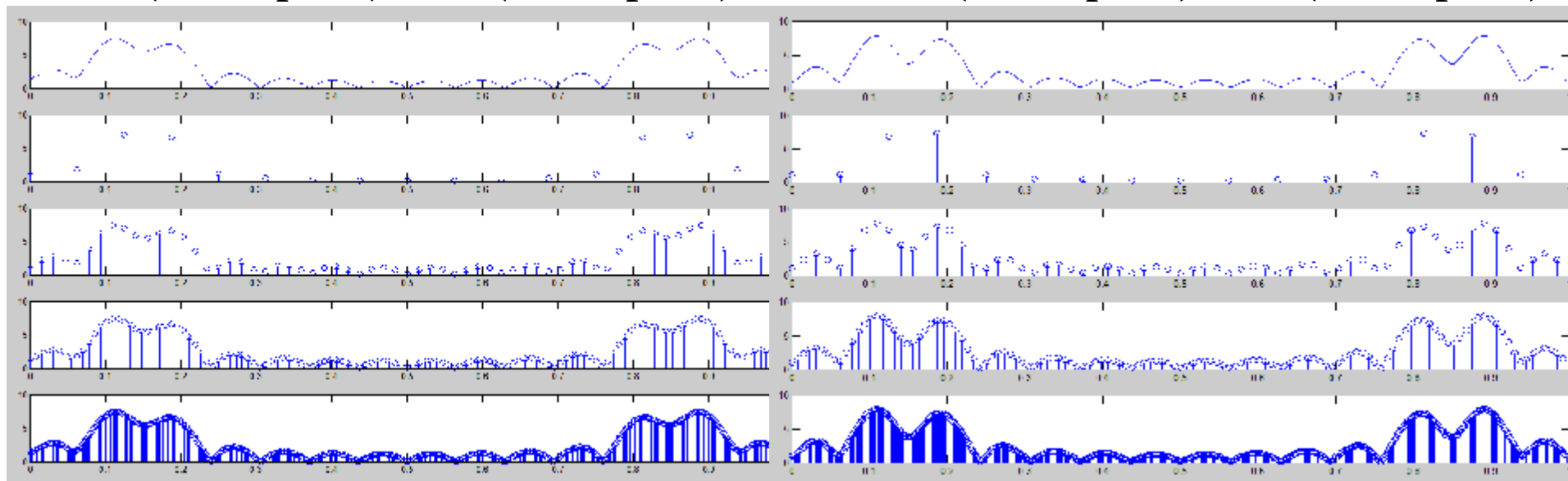
$$x = \sin(0.25\pi n) + \sin(0.30\pi n)$$

$$x = \sin(0.25\pi n) + \sin(0.33\pi n)$$



$$x = \sin(0.25\pi n) + \sin(0.34\pi n)$$

$$x = \sin(0.25\pi n) + \sin(0.35\pi n)$$



matlab参考程序:

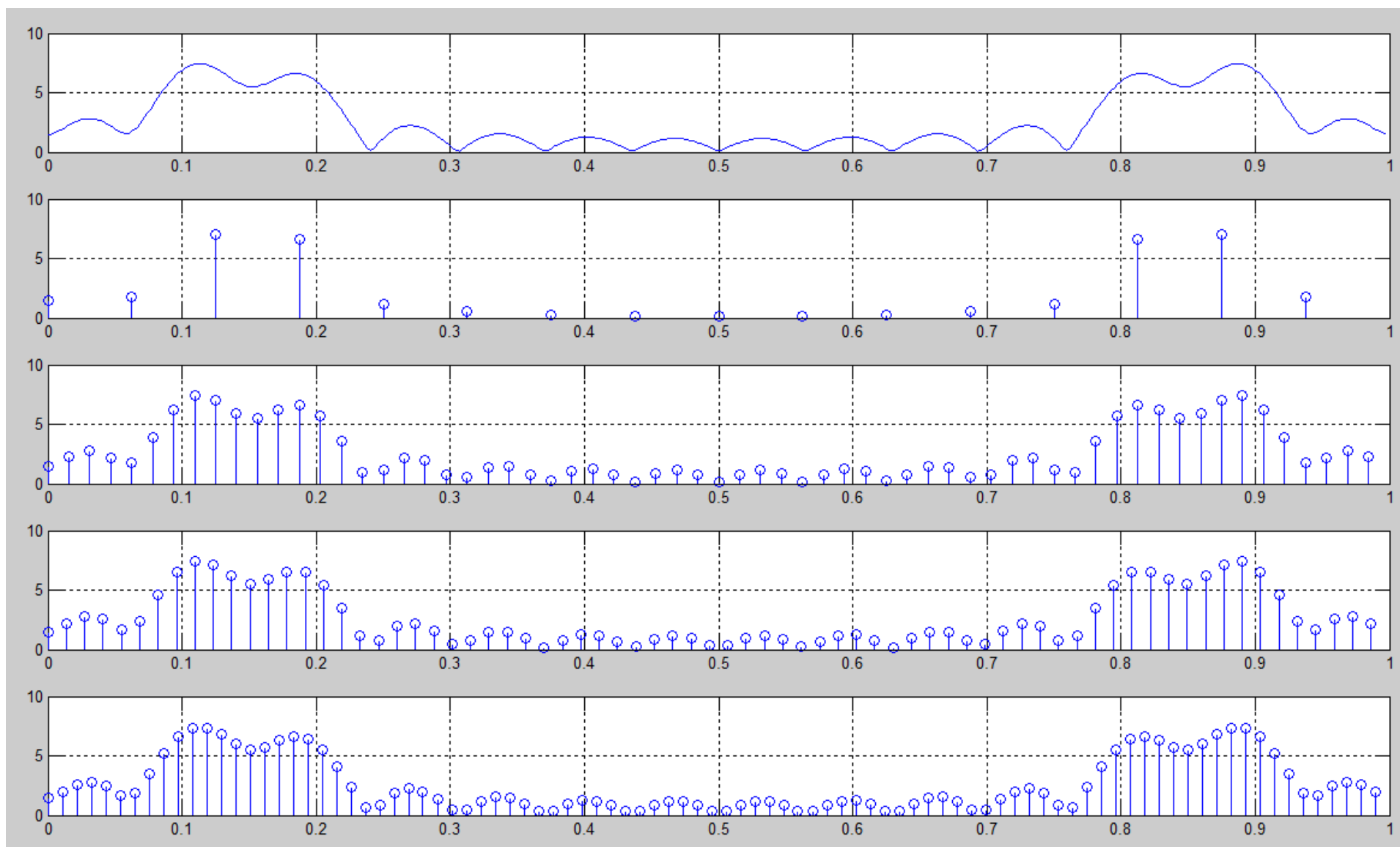
```
n=0:15
x=sin(0.25*pi*n)+sin(0.34*pi*n)
L1=0:15
dft_16=fft(x,16)
L2=0:63
dft_64=fft(x,64)
L3=0:127
dft_128=fft(x,128)
L4=0:511
dft_512=fft(x,512)
```

```
nx=0:15
K=512
dw=2*pi/K
k=0:511
X=x*exp(j*dw*nx'*k)
subplot(5,1,1)
plot(k*dw/(2*pi),abs(X))
```

```
subplot(5,1,2)
stem(L1/16,abs(dft_16))
subplot(5,1,3)
stem(L2/64,abs(dft_64))
subplot(5,1,4)
stem(L3/128,abs(dft_128))
subplot(5,1,5)
stem(L4/512,abs(dft_512))
```

延长序列的DFT (不是N的整数次幂)

序列 $x = \sin(0.25 \cdot \pi \cdot n) + \sin(0.35 \cdot \pi \cdot n)$; $n=0:15$;
补零到64点, 73点, 93点, 作DFT运算



习题集P47-12

12 已知 $x(n)$ 是长为 N 点的有限长序列, $X(k) = DFT[x(n)]$ 现将 $x(n)$ 的每两点之间补进 $r - 1$ 个零值点, 得到一个长为 rN 点的有限长度

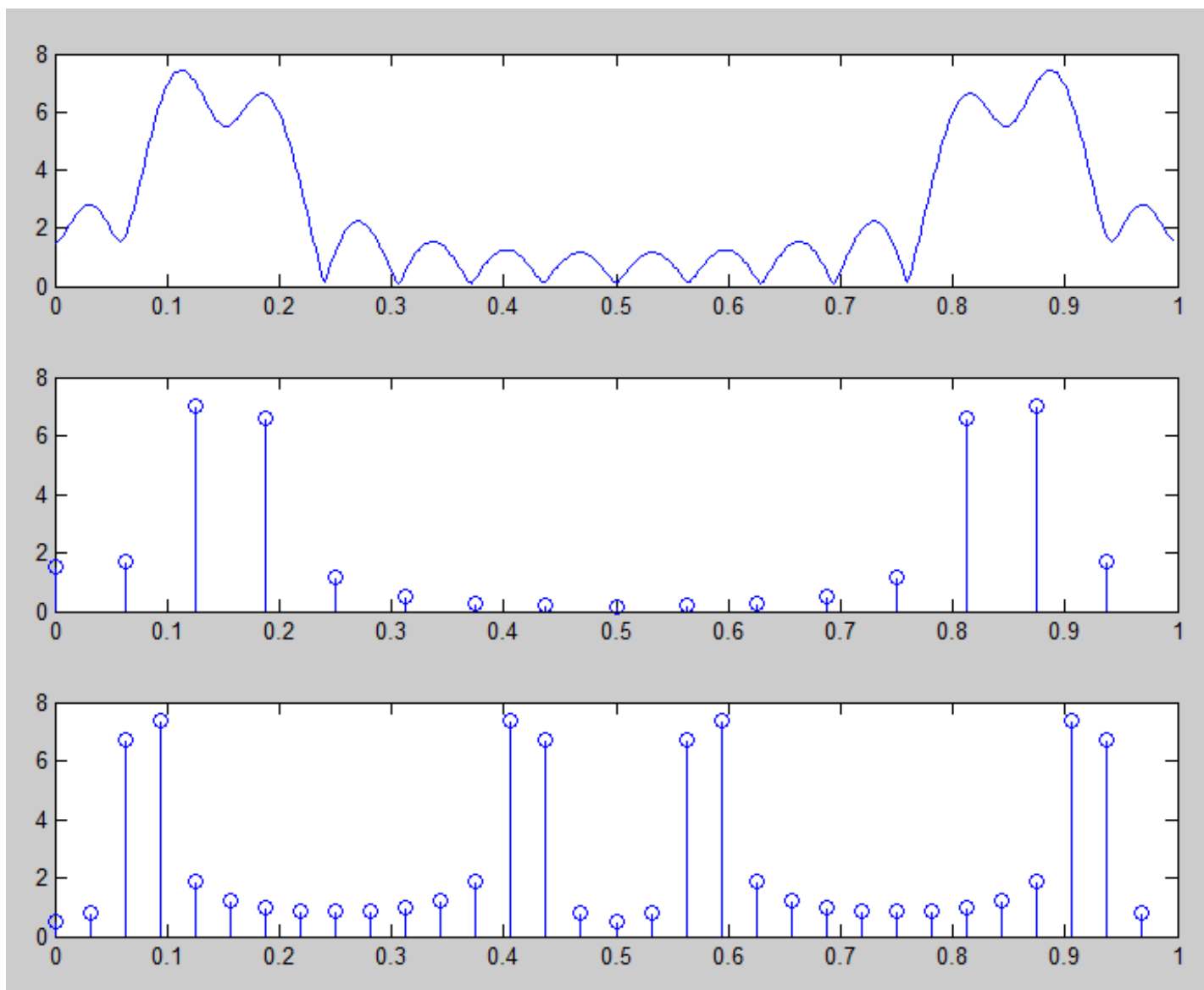
$$\text{序列 } y(n), \quad y(n) = \begin{cases} x(n/r), & n = ir, \quad 0 \leq i < N \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

试求 rN 点 $DFT[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

仿真如下: $r=2; r=4$

插值序列的DFT

序列 $x = \sin(0.25 \cdot \pi \cdot n) + \sin(0.34 \cdot \pi \cdot n)$; $n=0:15$; 16点DFT运算
(序列 n 为奇 $y=x$; n 为偶 $y=0$; 16点DFT运算)



```

%插值序列DFT
n=0:15
x=sin(0.25*pi*n)+sin(0.34*pi*n)

L1=0:15
dft_16=fft(x,16)

for m=1:32
if mod(m,2)==0
    y(m) = sin(0.25*pi*m/2)+sin(0.34*pi*m/2)
else
    y(m)=0
end
end

Ly=0:31
dft_y=fft(y,32)

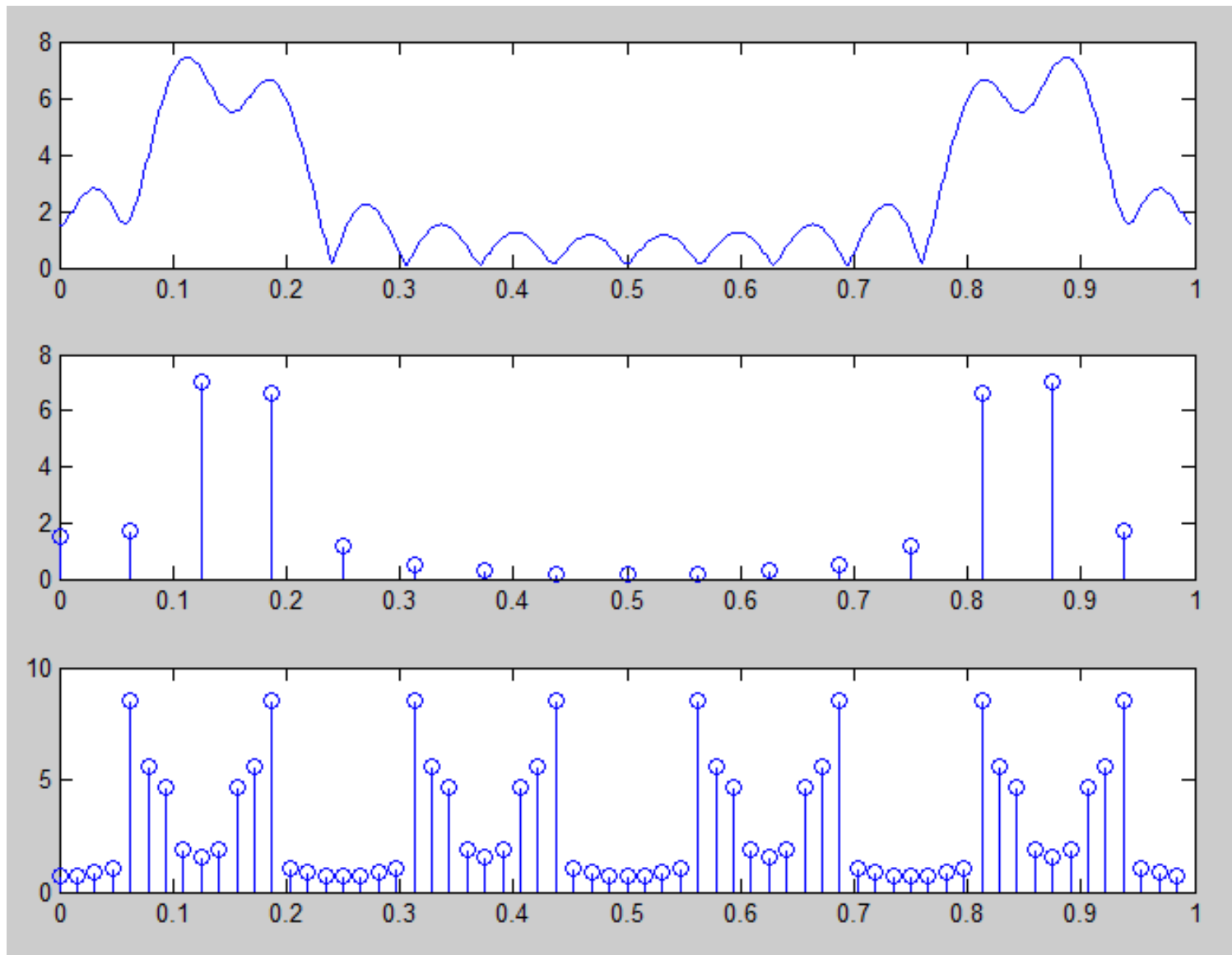
nx=0:15
K=512
dw=2*pi/K
k=0:511
X=x*exp(j*dw*nx'*k)
subplot(3,1,1)
plot(k*dw/(2*pi),abs(X))

subplot(3,1,2)
stem(L1/16,abs(dft_16))
subplot(3,1,3)
stem(Ly/32,abs(dft_y))

```

插值序列的DFT

序列 $x = \sin(0.25\pi n) + \sin(0.34\pi n)$; $n=0:15$; 16点DFT运算
(序列 $\text{mod}(n,4)=0$ 时 $y=x$; 其余 $y=0$; 16点DFT运算)



```

%插值序列DFT 02
n=0:15
x=sin(0.25*pi*n)+sin(0.34*pi*n)

L1=0:15
dft_16=fft(x,16)

for m=1:64
if mod(m,4)==0
    y(m) = sin(0.25*pi*m/2)+sin(0.34*pi*m/2)
else
    y(m)=0
end
end

Ly=0:63
dft_y=fft(y,64)

rx=0:15
K=512
dw=2*pi/K
k=0:511
X=x*exp(j*dw*rx'*k)
subplot(3,1,1)
plot(k*dw/(2*pi),abs(X))

subplot(3,1,2)
stem(L1/16,abs(dft_16))
subplot(3,1,3)
stem(Ly/64,abs(dft_y))

```

问题1:

序列DFT运算后，中间几个点模值比较大，能否直接置零实现低通滤波？

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

8. 圆周移位定理

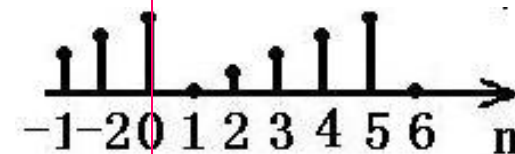
(1) 圆周移位

$$\forall x(n), 0 \leq n \leq N-1$$

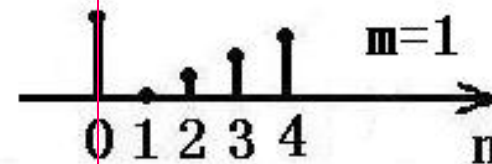
$$\tilde{x}(n) = x((n))_N$$



$$\tilde{x}(n-m) = x((n-m))_N$$



$$x_1(n) = x((n-m))_N R_N(n)$$



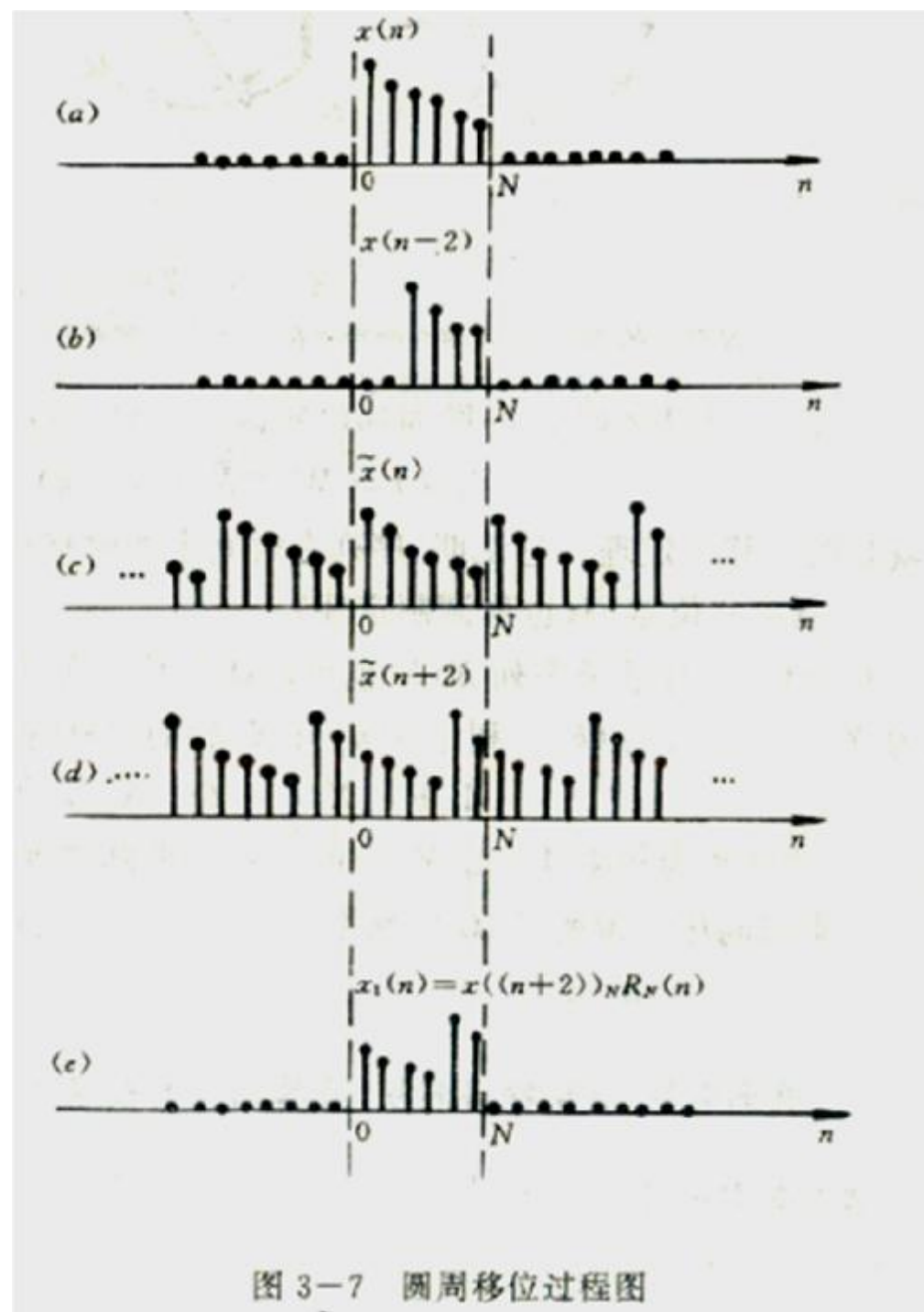


图 3-7 圆周移位过程图

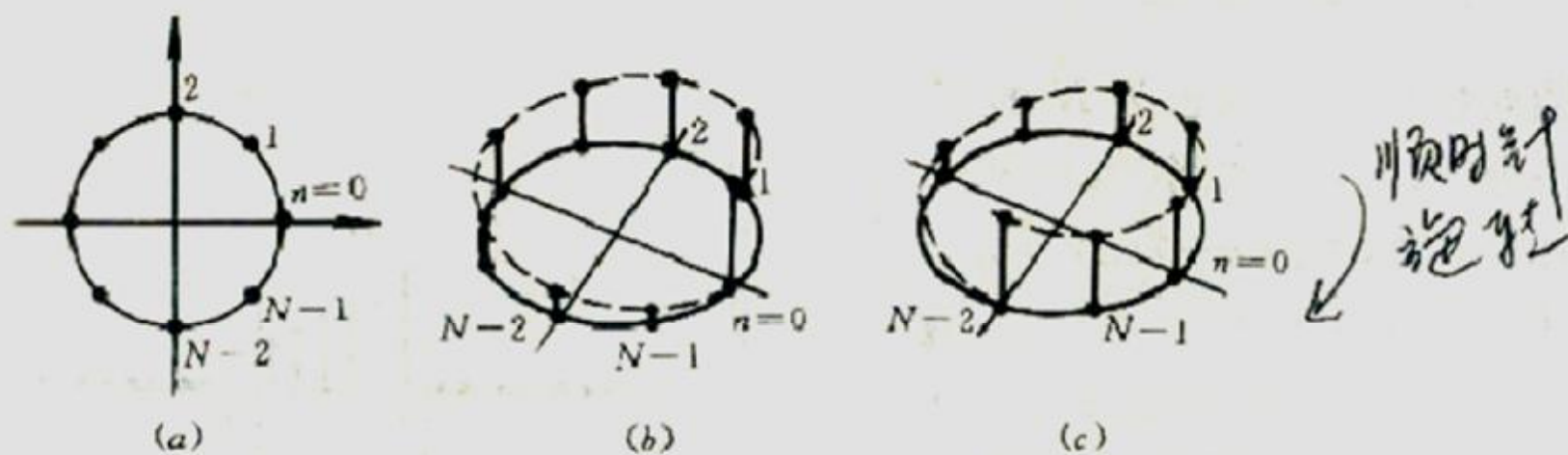


图 3-8 序列的圆周移位

(a) N 等分的圆周 (b) 将序列排列在 N 等分的圆周上 (c) 令圆周旋转得序列 $x(n)$ 的圆周移位

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

圆周移位计算，习题集：P38-4

已知序列 $x(n) = \{1, 1, 3, 2\}$ ，画出

(a) $x((-n))_5$

(b) $x((-n))_6 R_6(n)$

(c) $x((n))_3 R_3(n)$

(d) $x((n))_6$

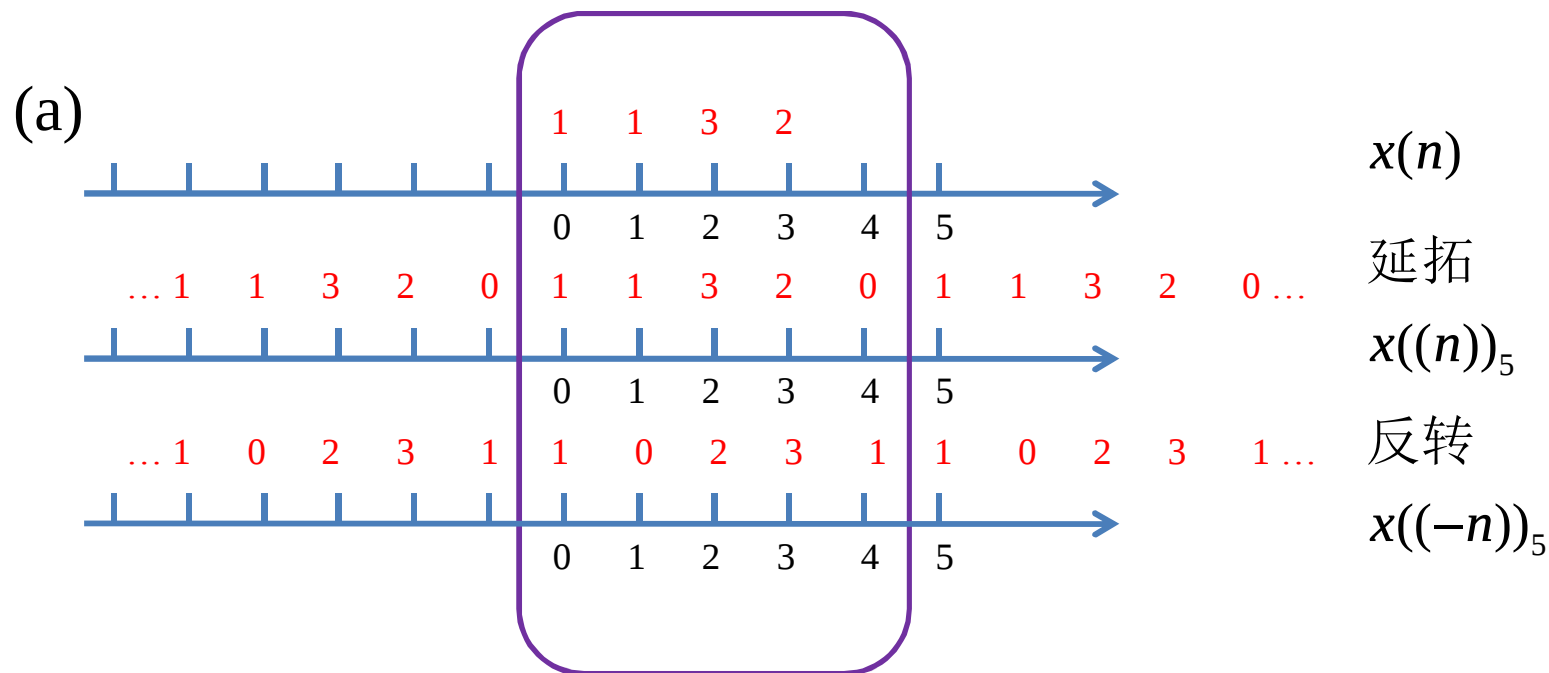
(e) $x((n-3))_5 R_5(n)$

(f) $x((n))_7 R_7(n)$

已知序列 $x(n) = \{1, 1, 3, 2\}$, 画出

(a) $x((-n))_5$ (b) $x((-n))_6 R_6(n)$ (c) $x((n))_3 R_3(n)$

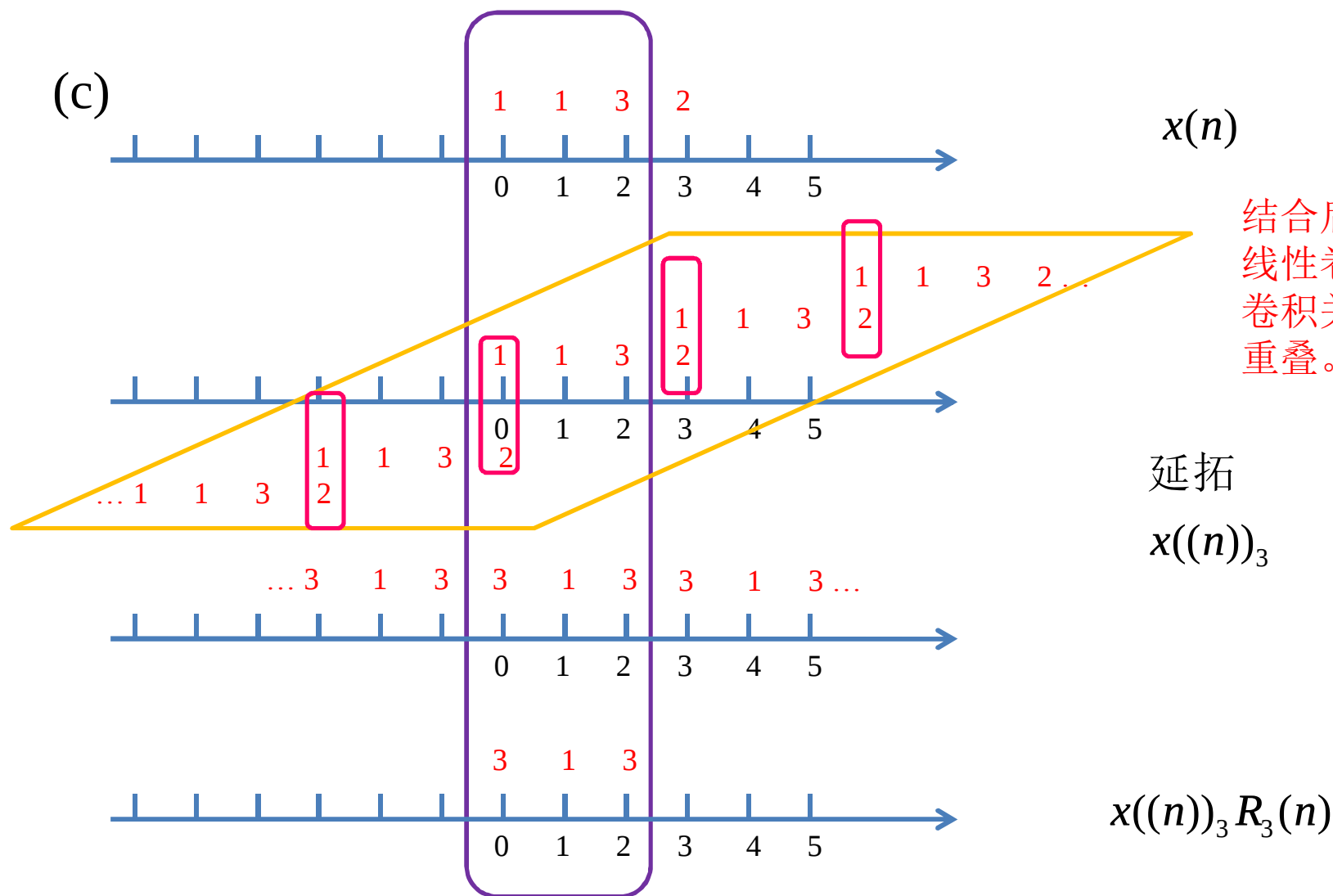
(d) $x((n))_6$ (e) $x((n-3))_5 R_5(n)$ (f) $x((n))_7 R_7(n)$



已知序列 $x(n] = \{1, 1, 3, 2\}$, 画出

(a) $x((-n))_5$ (b) $x((-n))_6 R_6(n)$ (c) $x((n))_3 R_3(n)$

(d) $x((n))_6$ (e) $x((n-3))_5 R_5(n)$ (f) $x((n))_7 R_7(n)$



§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

(2) 时间移位定理

由DFS的性质 (3-21) 式:

$$\text{若 } x(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} X(k), \text{ 则 } x(n-m) \xleftrightarrow{\text{DFS}} W_N^{mk} X(k)$$

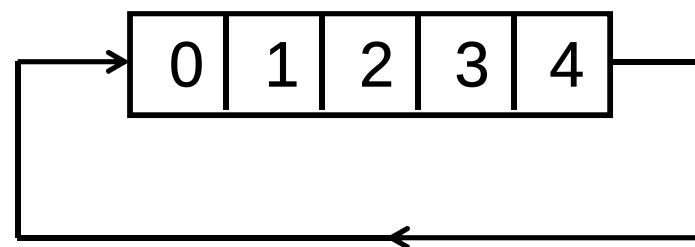
右移m $\tilde{X}_1(k) = W_N^{km} \tilde{X}(k)$

$$\begin{aligned} \therefore X_1(k) &= \tilde{X}_1(k) R_N(k) \\ &= W_N^{km} \tilde{X}(k) R_N(k) \\ &= W_N^{km} X(k) \end{aligned}$$

$$x_1(n) \stackrel{\Delta}{=} x((n-m))_N R_N(n) \leftrightarrow W_N^{km} X(k)$$

注意与 (3-46) 式比较

书上是左移



循环移位

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

(3) 频率移位定理

$$\forall x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$$

由DFS的性质 (3-22) 式:

$$\text{若 } \tilde{x}(k) \xleftrightarrow{IDFS} \tilde{x}(n), \text{ 则 } \tilde{x}(k-l) \xleftrightarrow{IDFS} W_N^{-nl} \tilde{x}(n)$$

$$\tilde{X}(k-l) \xleftrightarrow{DFS} W_N^{-nl} \tilde{x}(n)$$

$$\therefore X_2(k) @ \tilde{x}(k-l) R_N(k) \xrightarrow{DFT} W_N^{-nl} \tilde{x}(n) R_N(n)$$

$$= W_N^{-nl} x(n)$$

$$= x(n) e^{j \frac{2\pi}{N} nl}$$

$$\therefore X_2(k) \stackrel{\Delta}{=} X((k-l))_N R_N(k) \xleftrightarrow{DFT} W_N^{-nl} x(n)$$

注意与 (3-47) 式的区别

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

9. 圆周卷积（循环卷积）

（1）时域圆周卷积定理

由DFS的性质（3—23）式：

$$\begin{aligned} \tilde{X}_3(k) &= \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k) \\ \updownarrow \text{DFS} \quad \quad \updownarrow \text{DFS} \\ x_3(n) &= x_1(n) \tilde{\otimes} x_2(n) = IDFS \left[\tilde{X}_3(k) \right] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-m) \end{aligned}$$

循环卷积

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

$$\begin{aligned}\therefore X_3(k) &= \tilde{X}_3(k) R_N(k) \\ &= \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k) R_N(k) \\ &= X_1(k) X_2(k)\end{aligned}$$

$$x_3(n) = \tilde{x}_3(n) R_N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) R_N(n)$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N x_2((n-m))_N \right] R_N(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n)$$

$$= x_1(n) \otimes x_2(n)$$

注意n m
自变量
作用域

$$\therefore X_1(k) X_2(k) \xleftrightarrow{DFT} x_1(n) \otimes x_2(n)$$

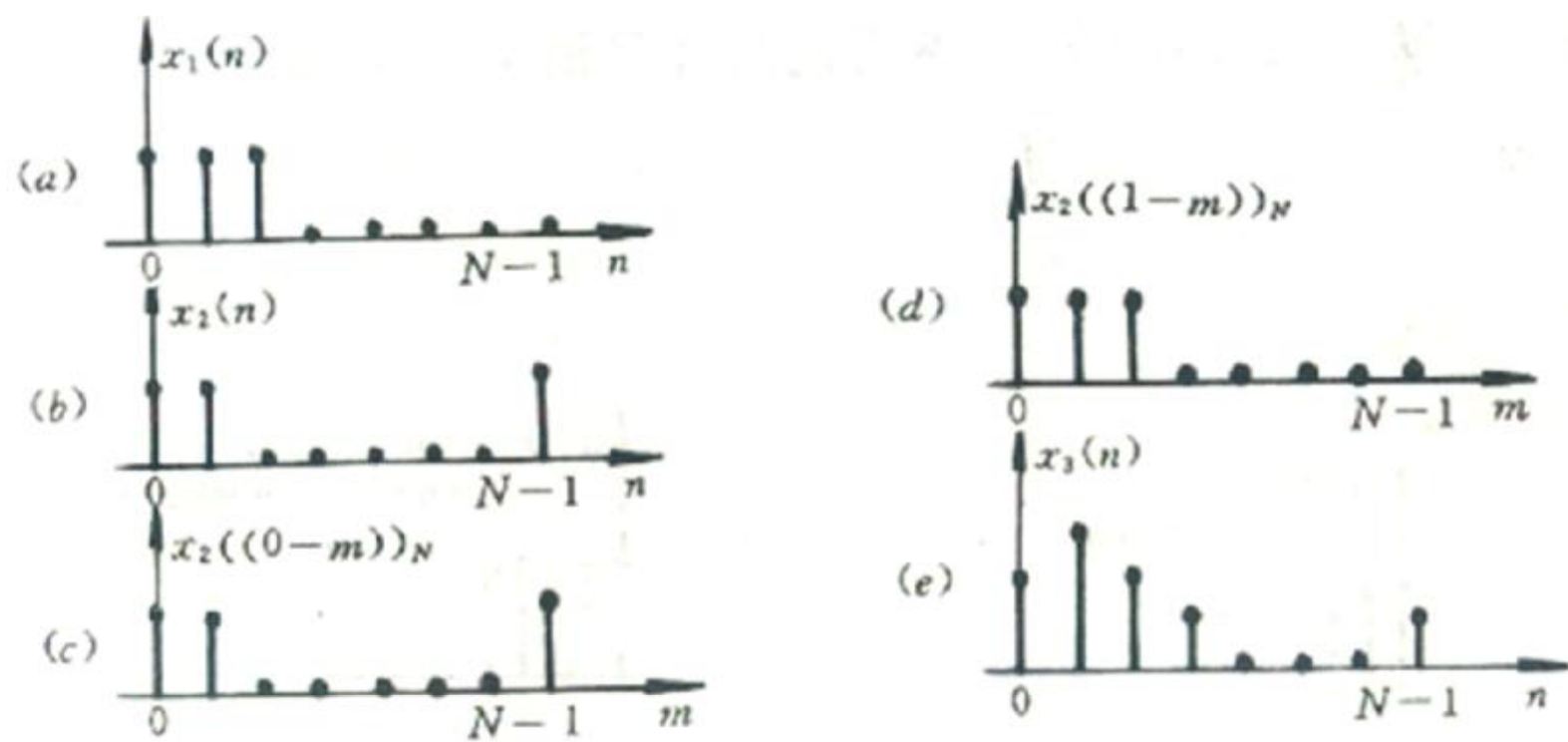


图 3-9 圆周卷积

(a) 序列 $x_1(n)$ (b) 序列 $x_2(n)$ (c) $x_2((0-m))_N$ (d) $x_2((1-m))_N$ (e) 序列 $x_3(n)$

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

(2) 频域圆周卷积

$$x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k)$$

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

(3) 圆周卷积与线性卷积的关系

$$\forall x_1(n), 0 \leq n \leq N-1$$

$$x_2(n), 0 \leq n \leq M-1, M \leq N$$

$$\otimes: \quad x_c(n) \stackrel{\Delta}{=} x_1(n) \otimes x_2(n), 0 \leq n \leq N-1$$

$$*: \quad x(n) \stackrel{\Delta}{=} x_1(n) * x_2(n), 0 \leq n \leq N+M-2$$

如何使 $x(n) = x_c(n)$?

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

如何使 $x(n) = x_c(n)$?

i) 长度相同

令 $L = N + M - 1$

$$x'_1(n) = \begin{cases} x_1(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & N \leq n \leq L-1 \end{cases} \quad x'_2(n) = \begin{cases} x_2(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & N \leq n \leq L-1 \end{cases}$$

$$x'_c(n) = x'_1(n) \otimes x'_2(n), \quad 0 \leq n \leq L-1$$

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n), \quad 0 \leq n \leq L-1$$

ii) 取值相同

$$\text{令 } \tilde{x}_1(n) \triangleq \sum_{q=-\infty}^{+\infty} x'_1(n + qL) = x'_1((n))_L$$

周期延拓

$$\tilde{x}_2(n) \triangleq \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x'_2(n + pL) = x'_2((n))_L$$

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_L(n) &\stackrel{\Delta}{=} \tilde{x}_1(n) \otimes \tilde{x}_2(n) \\
 &= \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \\
 &= \sum_{m=0}^{L-1} x'_1(m) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x'_2(n-m+pL) \\
 \text{交换次序} \quad &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x'_1(m) x'_2(n+pL-m) \\
 &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n+pL-m) \\
 &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(n+pL)
 \end{aligned}$$

以L为周期的周期延拓

$$\begin{aligned}
 \therefore x'_c(n) &= \tilde{x}_L(n) R_L(n) \\
 &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(n+pL) R_L(n) \\
 &= x(n)
 \end{aligned}$$

取主值区间

$$\therefore \text{当 } L = N + M - 1$$

$$\begin{aligned}
 &\text{或 } 0 \leq N \leq L-1 \\
 &0 \leq N \leq N + M - 2 \quad \text{时}
 \end{aligned}$$

$$x_1(n) * x_2(n) = x'_1(n) \otimes x'_2(n)$$

由上述推导不难看出

$$\forall L \geq N + M - 1$$

$$x'_1(n) \otimes x'_2(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

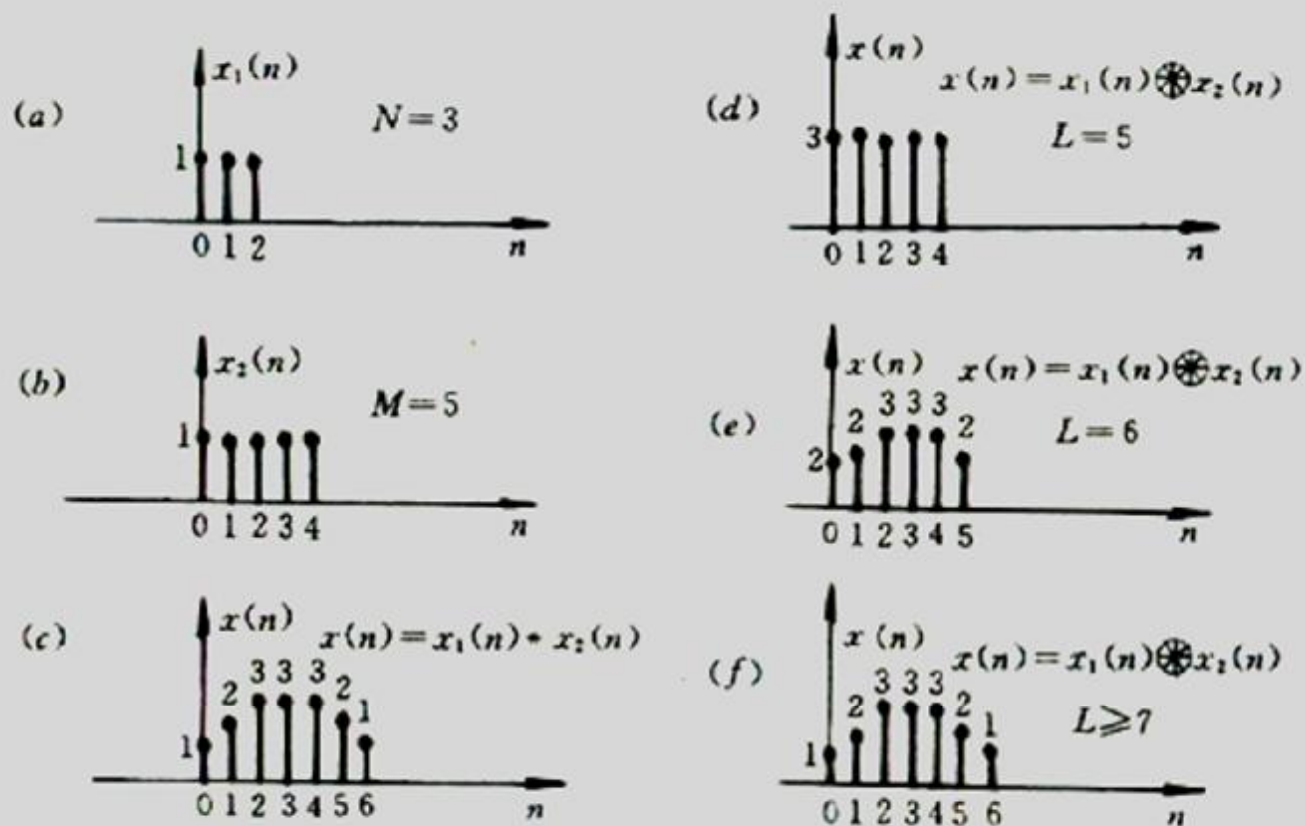


图 3-10 圆周卷积与线性卷积

(a) 序列 $x_1(n)$ (b) 序列 $x_2(n)$ (c) 序列 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的线性卷积结果 (d) $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的列长 $L=5$ 的圆周卷积 (e) $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的列长 $L=6$ 的圆周卷积 (f) $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的列长 $L \geq 7$ 的圆周卷积

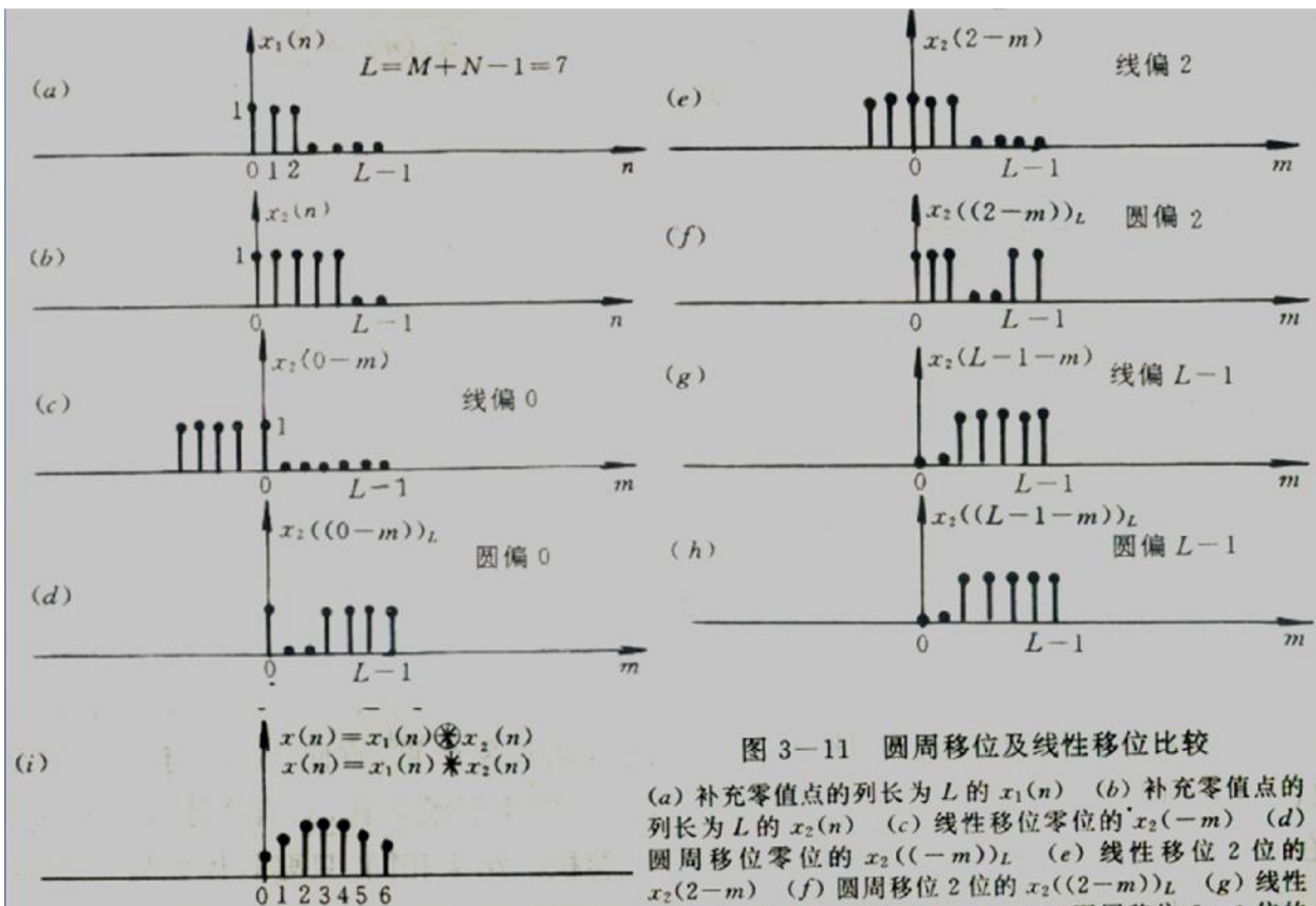


图 3-11 圆周移位及线性移位比较

(a) 补充零值点的列长为 L 的 $x_1(n)$ (b) 补充零值点的列长为 L 的 $x_2(n)$ (c) 线性移位零位的 $x_2(-m)$ (d) 圆周移位零位的 $x_2((-m))_L$ (e) 线性移位 2 位的 $x_2(2-m)$ (f) 圆周移位 2 位的 $x_2((2-m))_L$ (g) 线性移位 $L-1$ 位的 $x_2(L-1-m)$ (h) 圆周移位 $L-1$ 位的 $x_2((L-1-m))_L$ (i) 线性卷积与圆周卷积相等的 $x(n)$

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

圆周卷积计算方法小结：

- 1, 哑元坐标
- 2, 周期延拓
- 3, 反转
- 4, 周期移位, 相乘相加

例题：
历年考试真题

已知两个时间序列 $u(n) = \{0, 1, 2, 1, 0\}$ 和 $v(n) = \{0, 1, 0, 1, 0\}$

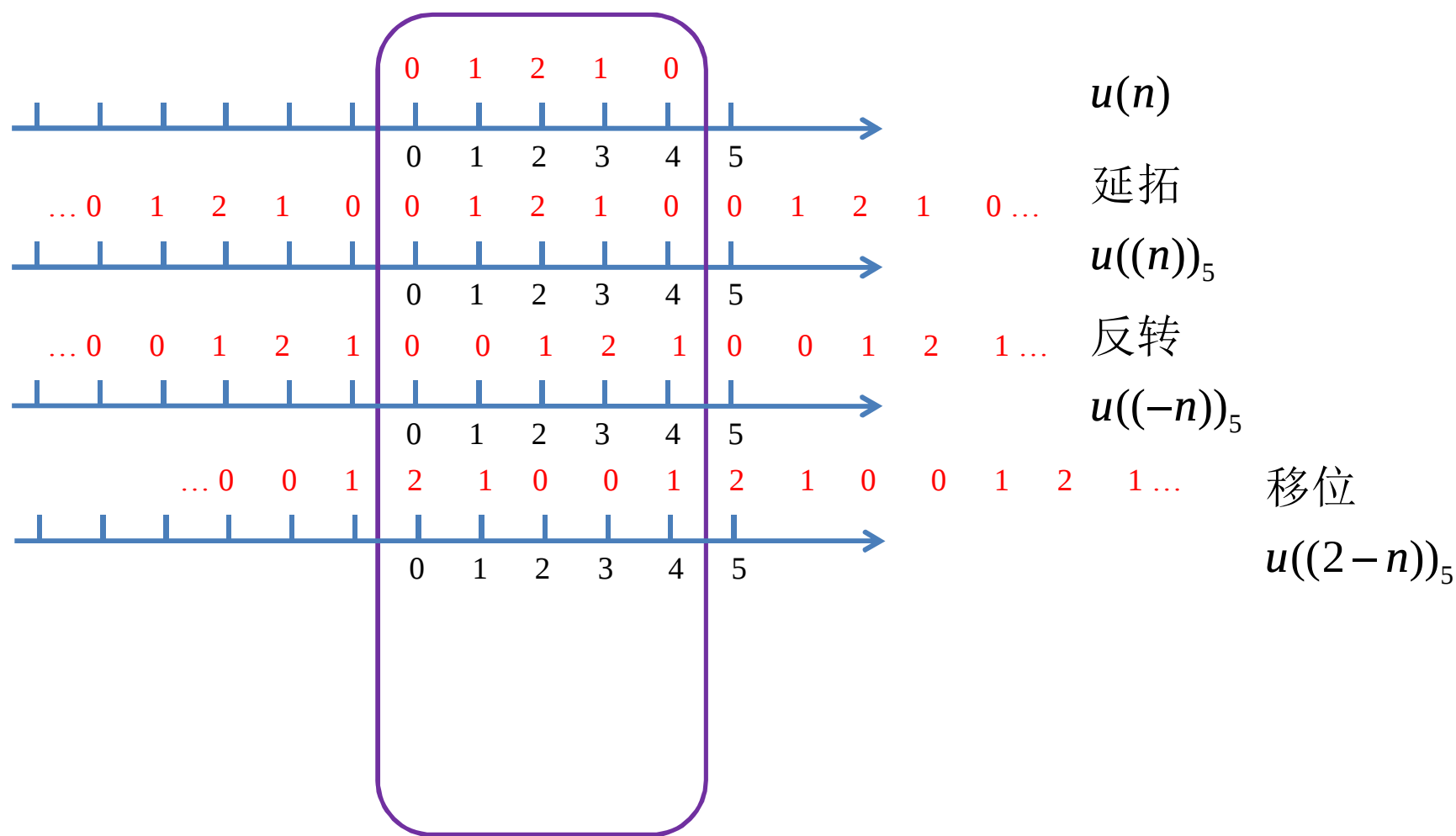
(a)画出 $x(n) = u((2 - n))_5 R_5(n)$ 的图形

(b)求序列 $u(n)$ 和 $v(n)$ 的线性卷积

(c)求序列 $u(n)$ 和 $v(n)$ 的5点圆周卷积

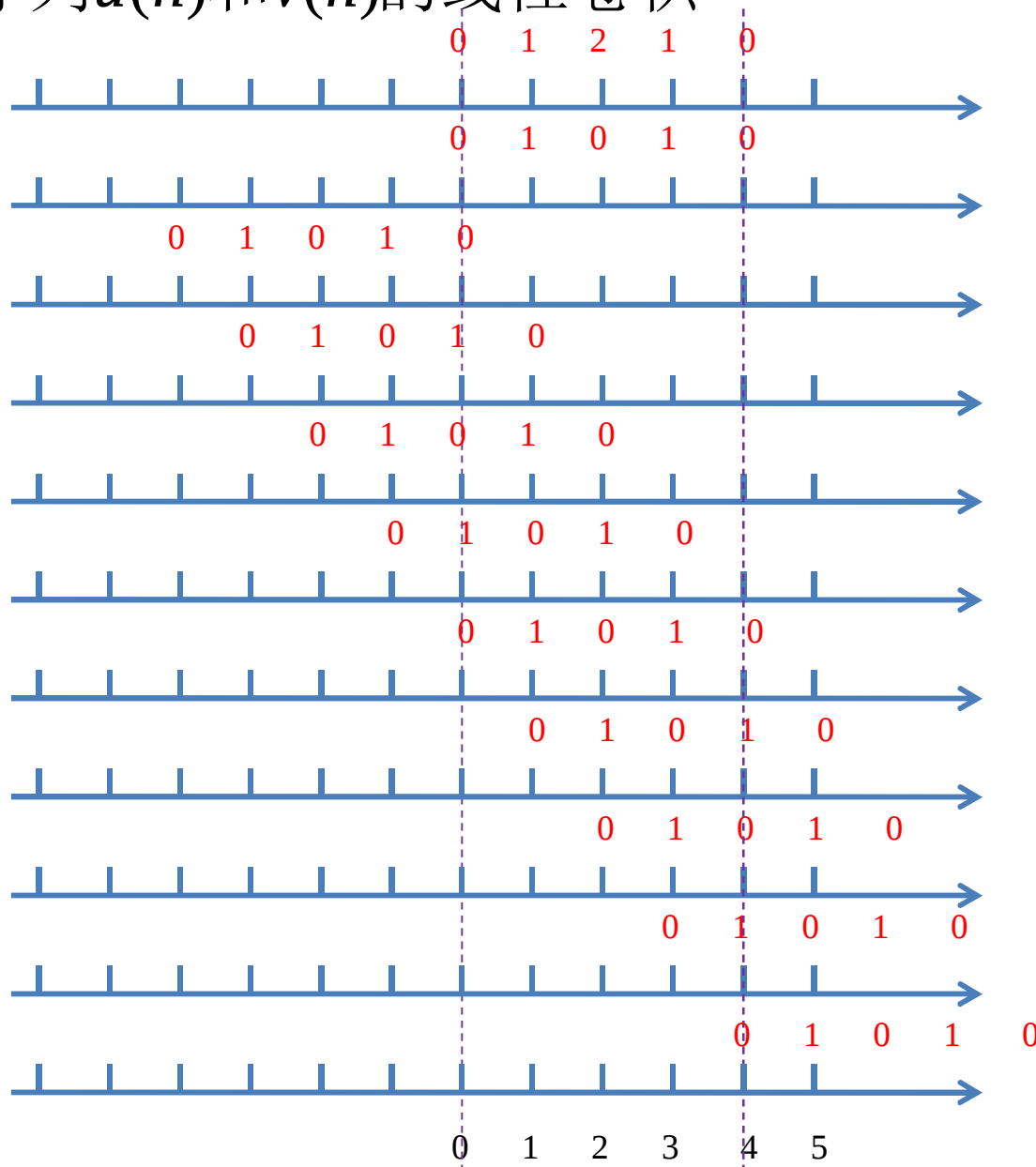
已知两个时间序列 $u(n) = \{0, 1, 2, 1, 0\}$ 和 $v(n) = \{0, 1, 0, 1, 0\}$

(a) 画出 $x(n) = u((2-n))_5 R_5(n)$ 的图形



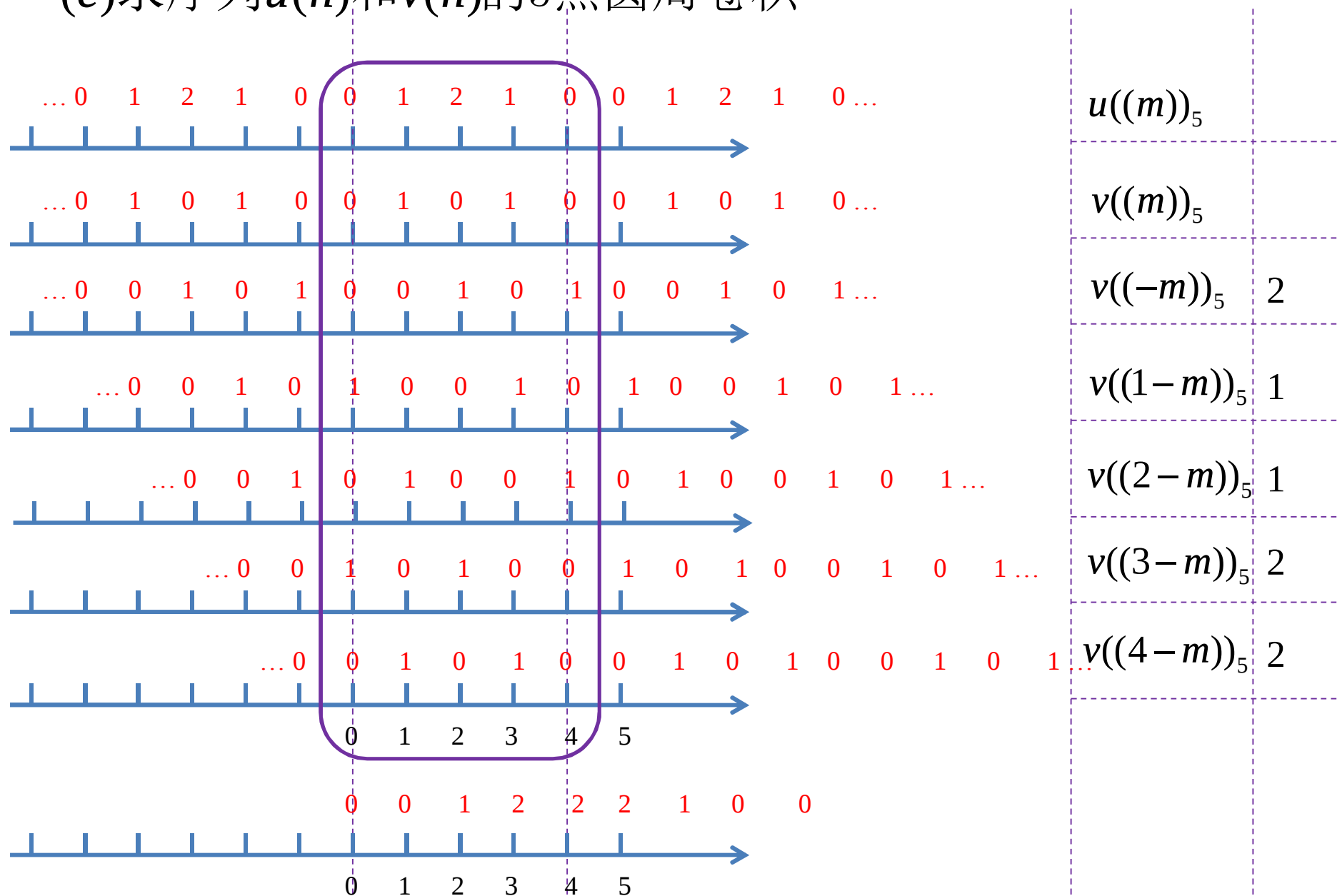
已知两个时间序列 $u(n) = \{0, 1, 2, 1, 0\}$ 和 $v(n) = \{0, 1, 0, 1, 0\}$

(b) 求序列 $u(n)$ 和 $v(n)$ 的线性卷积



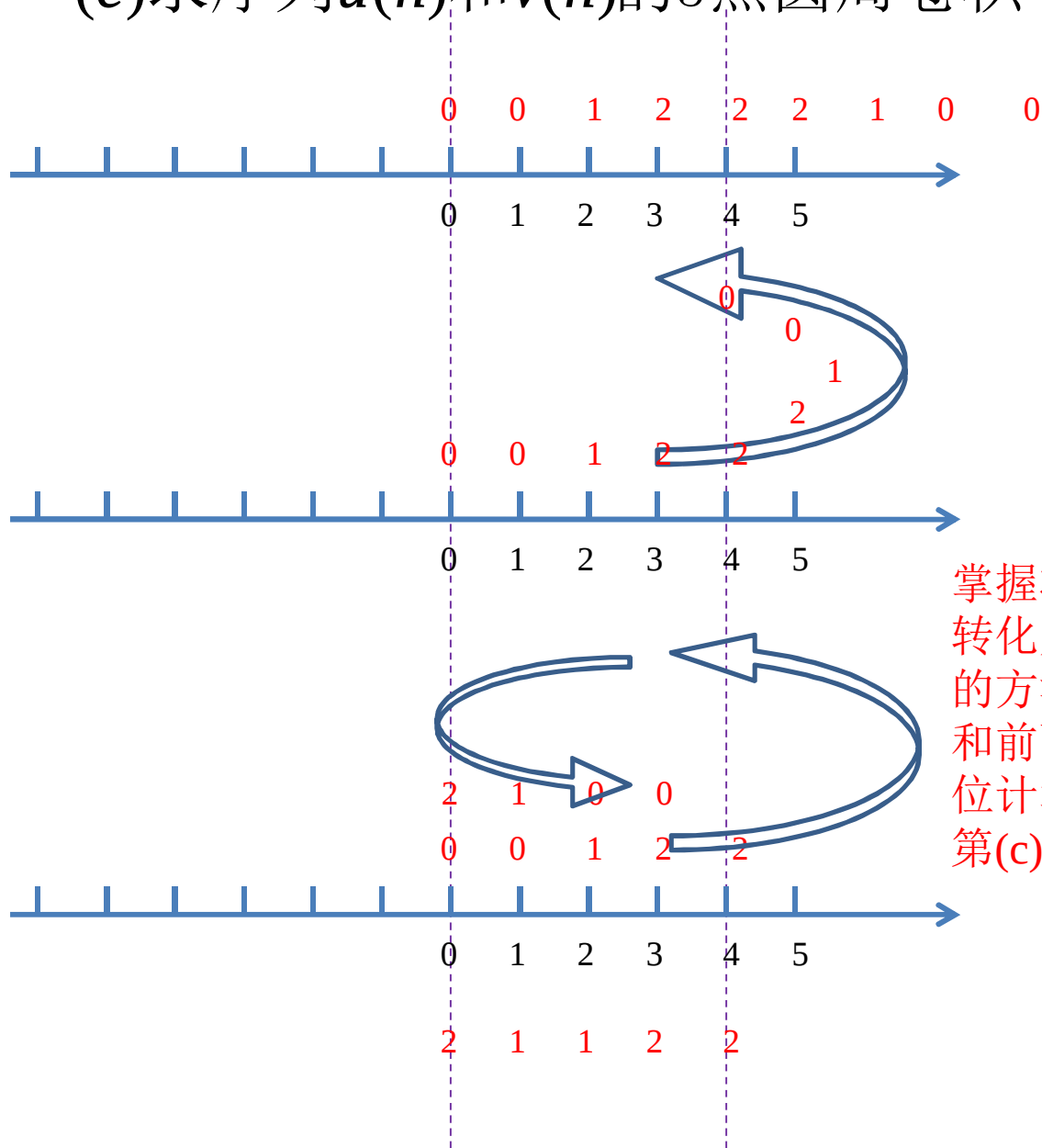
$u(m)$	
$v(m)$	
$v(-m)$	0
$v(1-m)$	0
$v(2-m)$	1
$v(3-m)$	2
$v(4-m)$	2
$v(5-m)$	2
$v(6-m)$	1
$v(7-m)$	0
$v(8-m)$	0

(c)求序列 $u(n)$ 和 $v(n)$ 的5点圆周卷积



已知两个时间序列 $u(n) = \{0, 1, 2, 1, 0\}$ 和 $v(n) = \{0, 1, 0, 1, 0\}$

(c) 求序列 $u(n)$ 和 $v(n)$ 的 5 点圆周卷积



掌握将 L 点线性卷积
转化为 N 点圆周卷积
的方法。
和前面讲到的圆周移
位计算(习题集P38-4
第(c)问)结合理解。

$u((m))_5$	
$v((m))_5$	
$v((-m))_5$	2
$v((1-m))_5$	1
$v((2-m))_5$	1
$v((3-m))_5$	2
$v((4-m))_5$	2

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

(4) 圆周卷积在信号处理中的应用

计算线性系统输出 $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{线性卷积} \\ \bullet \text{圆周卷积-} \rangle \text{快速卷积} \end{array} \right.$

快速卷积

$$\forall x(n), 0 \leq n \leq N-1 \quad h(n), 0 \leq n \leq M-1$$

$$\exists x(n) * h(n) = ?$$

$$x(n) \rightarrow x'(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & N \leq n \leq L-1 \end{cases}$$

$$h(n) \rightarrow h'(n) = \begin{cases} h(n) & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & M \leq n \leq L-1 \end{cases} \quad L \geq N + M - 1$$