数字信号处理

周治国

2015.9

第三章
离散傅里叶变换

§3-4 离散傅里叶变换(DFT)

DFS： $\tilde{x}(n) \longleftrightarrow \tilde{X}(k)$

实际情况： $x_a(t) \longrightarrow x_a(nT), \forall n$

$$\Big\downarrow$$

$$x(n) \stackrel{\triangle}{=} x_a(nT), n = 0,1,\cdots, N-1$$

那么，

$$x(n), 0 \le n \le N-1$$

$$\Big\updownarrow \quad \longrightarrow \ ?$$

$$X(k), 0 \le k \le N-1$$

§3-4 离散傅里叶变换(DFT)

一、DFT的推导

$x(n)$周期延拓

令 $\tilde{x}(n+lN)=x(n), 0\le n\le N-1, \forall l=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n), 0\le n\le N-1\\ 0 \quad , n<0, n\ge N\end{cases}=\tilde{x}(n)R_N(n) \qquad \tilde{x}(n)\text{主值序列}$$

由DFS变换[3-17式]

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn} \qquad \forall k\in I$$

显然 $\tilde{X}(k)=\tilde{X}(k+N)$

仅有N个独立值

§3-4 离散傅里叶变换(DFT)

令 $X(k) \triangleq \tilde{X}(k) R_N(n)$

则有 $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad 0 \le k \le N-1$

即 $x(n), 0 \le n \le N-1 \longrightarrow X(k), 0 \le k \le N-1$

问题: $X(k), 0 \le k \le N-1 \xrightarrow{?} x(n), 0 \le n \le N-1$

$\because x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$

$$= \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} \right) R_N(n)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

$0 \le n \le N-1$

$\therefore X(k) \longrightarrow x(n)$

$0 \le k \le N-1 \qquad 0 \le n \le N-1$

§3-4 离散傅里叶变换(DFT)

归纳起来：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}\qquad 0\le k\le N-1$$

$$\stackrel{\triangle}{=}DFT\left[x(n)\right]$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\qquad 0\le n\le N-1$$

$$\stackrel{\triangle}{=}IDFT\left[X(k)\right]$$

§3-4 离散傅里叶变换(DFT)

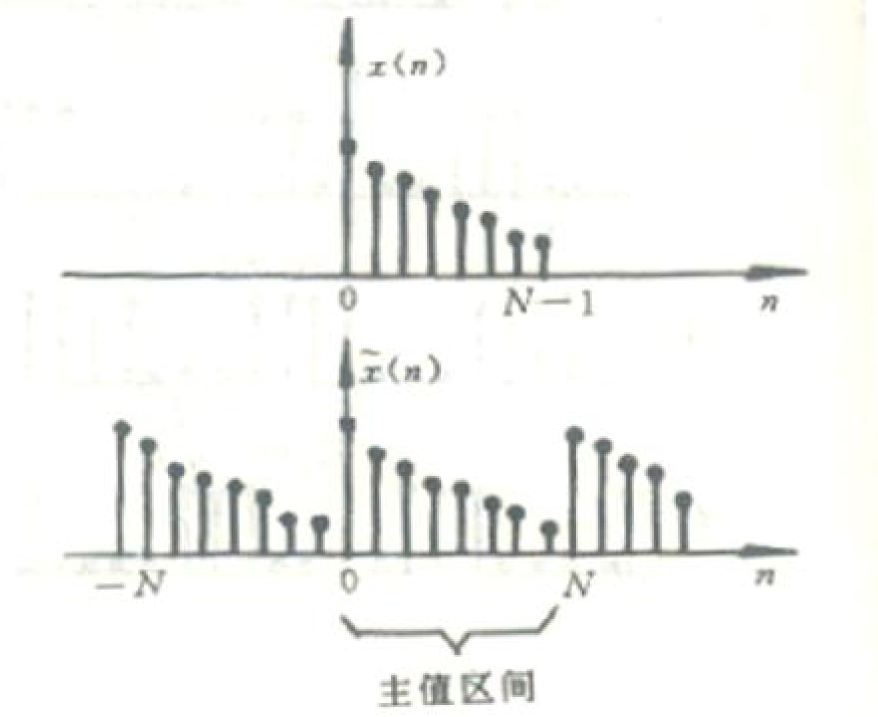
注意：

【1】DFT隐含周期性

【2】$x(n)$与$\tilde{x}(n)$的内在联系

$\tilde{x}(n)$是$x(n)$的周期延拓，

$x(n)$是$\tilde{x}(n)$的主值序列。



分别简记为：

$$\tilde{x}(n)=x((n))_N$$

$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$$

$((n))_N$ 表示余数运算表达式，

比如： $\forall n=mN+n_1$

$$((n))_N=n_1$$

$$x((n))_N=x(n_1)$$

注意x(n)有时表示一个序列，
有时表示序列中一个值

§3-4 离散傅里叶变换(DFT)

【3】$X(k)$与$\tilde{X}(k)$的内在联系

$$X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)$$

$$\tilde{X}(k)=X\big((k)\big)_N$$

【4】

$$\begin{tikzcd}
x_a(t) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & x_a(nT) \arrow[r, "近似"] \arrow[d, leftrightarrow] & x(n),0\le n\le N-1 \arrow[d, leftrightarrow] \\
X_a(j\Omega) & X(e^{j\Omega T})=X(e^{jw}) \arrow[l] & X(k) \arrow[l, "近似"'] \arrow[ll, bend left, "近似"]
\end{tikzcd}$$

优点：便于PC机运算，可以广泛应用

历年考试真题

求序列$x(n)=\{1 \quad -1 \quad 1 \quad -1\}$的$DFT$

历年考试真题

求序列$y(n)=\sin(2pn/N)+\cos(4pn/N), 0\le n\le N-1$的$DFT$

已知4点序列x(n)的z变换X(z)在z平面上0.25，0.25j，-0.25和-0.25j四点处的值均是1

求：

1，x(n)的4点DFT值X(k)；

2，若想进一步通过DFT计算考察x(n)的DTFT谱在频率5π/16处的值，有什么可行的方法？写出该方法的具体思想和步骤。