数字信号处理

周治国

2015.9

第二章
离散时间信号与系统分析基础

§2-6 DTFT的对称性质

一、几个术语

1.对任意实序列:

1.$x(n)$为实序列，若$x(n)=x(-n)$，则称偶对称

记为：$x_e(n)=x_e(-n)$

even

2.$x(n)$为实序列，若$x(n)=-x(-n)$，则称奇对称

记为：$x_o(n)=-x_o(-n)$

odd

§2-6 DTFT的对称性质

一、几个术语

1.对任意实序列:

3.$x(n)$为实序列，$\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$是偶序列

即：$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$

4.$x(n)$为实序列，$\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$是奇序列

即：$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$

$\Rightarrow x(n)=x_e(n)+x_o(n)$

结论：任一实序列可由偶序列和奇序列之和构成。

§2-6 DTFT的对称性质

一、几个术语

2.对任意复序列：

1.$x(n)$为复序列，若$x(n)=x^*(-n)$，则称共轭对称

记为：$x_e(n)=x_e^*(-n)$

2.$x(n)$为复序列，若$x(n)=-x^*(-n)$，则称共轭反对称

记为：$x_o(n)=-x_o^*(-n)$

§ 2-6 DTFT的对称性质

一、几个术语

2.对任意复序列:

3.$x(n)$为复序列,$\frac{1}{2}\left[x(n)+x^{*}(-n)\right]$是共轭对称序列

即: $x_e(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^{*}(-n)\right]$

4.$x(n)$为复序列,$\frac{1}{2}\left[x(n)-x^{*}(-n)\right]$是共轭反对称序列

即: $x_o(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^{*}(-n)\right]$

$\Rightarrow x(n)=x_e(n)+x_o(n)$

结论:任一复序列可由共轭对称序列和共轭反对称序列之和构成。

§2-6 DTFT的对称性质

3.DTFT的共轭对称与共轭反对称：

*DTFT*离散时间傅里叶变换

$$\begin{cases} X\left(e^{jw}\right)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jwn} \\ x(n)=\dfrac{1}{2p}\int_{-p}^{p} X\left(e^{jw}\right)e^{jwn}dw \end{cases}$$

$$X(e^{jw})=X_e(e^{jw})+X_o(e^{jw})$$

$X_e(e^{jw})=\dfrac{1}{2}\left[X(e^{jw})+X^*(e^{-jw})\right]$是共轭对称函数

即：$X_e(e^{jw})=X_e^*(e^{-jw})$

$X_o(e^{jw})=\dfrac{1}{2}\left[X(e^{jw})-X^*(e^{-jw})\right]$是共轭反对称函数

即：$X_o(e^{jw})=-X_o^*(e^{-jw})$

§ 2-6 DTFT的对称性质

二、DTFT的对称性质：

*DTFT*离散时间傅里叶变换

$$\begin{cases} X\left(e^{jw}\right)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jwn} \\ x(n)=\dfrac{1}{2p}\int_{-p}^{p} X\left(e^{jw}\right)e^{jwn}dw \end{cases}$$

$$DTFT\left[x(n)\right]=X\left(e^{jw}\right)$$

$$DTFT\left[x^*(n)\right]=X^*\left(e^{-jw}\right)$$

$$DTFT\left[x^*(-n)\right]=X^*\left(e^{jw}\right)$$

即：

$$x(n)\leftrightarrow X\left(e^{jw}\right)$$

$$x^*(n)\leftrightarrow X^*\left(e^{-jw}\right)$$

$$x^*(-n)\leftrightarrow X^*\left(e^{jw}\right)$$

证明：

$$1.DTFT\left[x^*(n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n)e^{-jwn}=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{jwn}\right]^*=\left[X\left(e^{-jw}\right)\right]^*=X^*\left(e^{-jw}\right)$$

$$2.DTFT\left[x^*(-n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(-n)e^{-jwn}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^*(m)e^{jwm}=\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)e^{-jwm}\right]^*$$

$$=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jwn}\right]^*=\left[X\left(e^{jw}\right)\right]^*=X^*\left(e^{jw}\right)$$

§2-6 DTFT的对称性质

*DTFT*离散时间傅里叶变换

$$\begin{cases} X\left(e^{jw}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jwn} \\ x(n)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} X\left(e^{jw}\right)e^{jwn}dw \end{cases}$$

$$x(n)\leftrightarrow X\left(e^{jw}\right)$$

$$x^*(n)\leftrightarrow X^*\left(e^{-jw}\right)$$

$$x^*(-n)\leftrightarrow X^*\left(e^{jw}\right)$$

$$\mathrm{Re}\{x(n)\}=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(n)\right]\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[X(e^{jw})+X^*(e^{-jw})\right]=X_e(e^{jw})$$

$$j\,\mathrm{Im}\{x(n)\}=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(n)\right]\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[X(e^{jw})-X^*(e^{-jw})\right]=X_o(e^{jw})$$

$$x_e(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(-n)\right]\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[X(e^{jw})+X^*(e^{jw})\right]=\mathrm{Re}\{X(e^{jw})\}$$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(-n)\right]\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[X(e^{jw})-X^*(e^{jw})\right]=j\,\mathrm{Im}\{X(e^{jw})\}$$

§2-6 DTFT的对称性质

实序列：$x(n) \leftrightarrow X(e^{jw})$

$x(n) \leftrightarrow X(e^{jw})$

$x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-jw})$

$x^*(-n) \leftrightarrow X^*(e^{jw})$

$1. x(n) = x^*(n) \Rightarrow X(e^{jw}) = X^*(e^{-jw})$

$$2.\begin{cases} X(e^{jw}) = \mathrm{Re}\{X(e^{jw})\} + j\,\mathrm{Im}\{X(e^{jw})\} \\ X^*(e^{-jw}) = \mathrm{Re}\{X(e^{-jw})\} - j\,\mathrm{Im}\{X(e^{-jw})\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{X(e^{jw})\} = \mathrm{Re}\{X(e^{-jw})\} \\ \mathrm{Im}\{X(e^{jw})\} = -\mathrm{Im}\{X(e^{-jw})\} \end{cases}$$

实部相等
虚部相等

$X(e^{jw})$实部是偶函数，虚部是奇函数

3.极坐标形式：$X(e^{jw}) = \left|X(e^{jw})\right| e^{j\arg\left[X(e^{jw})\right]}$

幅度是w的偶函数$\left|X(e^{jw})\right| = \left|X(e^{-jw})\right|$

相位是w的奇函数$\arg\left[X(e^{jw})\right] = -\arg\left[X(e^{-jw})\right]$