

# 数字信号处理

周治国

2015.9



# 第二章

## 离散时间信号与系统分析基础

## § 2-4 离散时间线性非时变系统

### 一、时域描述

$$y(n) \sim x(n): \sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

无限长单位脉冲  
响应数字滤波器

$$h(n): y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

有限长单位脉冲  
响应数字滤波器

离散时间系统运算关系  $T[\bullet]$   $y(n) = T[x(n)]$

线性系统

$$y_1(n) = T[x_1(n)] \quad y_2(n) = T[x_2(n)]$$

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

非时变系统

$$y(n) = T[x(n)]$$

$$y(n-k) = T[x(n-k)]$$

## § 2-4 离散时间线性非时变系统

### 二、频域描述

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\omega n} \longrightarrow \text{频率响应}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi)})$$

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega})$$

## § 2-4 离散时间线性非时变系统

### 三、变换域描述

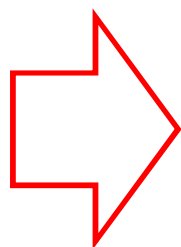
$$H(z) = \mathcal{Z}[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n} \longrightarrow \text{系统函数}$$

$$\text{如 } H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

## § 2-4 离散时间线性非时变系统

### 四、单位取样响应与卷积

$$\left\{ \begin{array}{l} h(n) = T[d(n)] \\ x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)d(n-k) \end{array} \right. \quad \text{加权延时线性组合}$$



$$\begin{aligned} y(n) &= T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)d(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)T[d(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \\ &= x(n) * h(n) \end{aligned}$$

P21 任何离散时间线性非时变系统，可以通过其单位取样响应 $h(n)$ 来表征。

## § 2-4 离散时间线性非时变系统

### 五、卷积运算的基本规律

Ø 交换律  $y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$

Ø 结合律 
$$\begin{aligned} y(n) &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\ &= [x(n) * h_2(n)] * h_1(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \end{aligned}$$

Ø 分配率 
$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] \\ &= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \end{aligned}$$

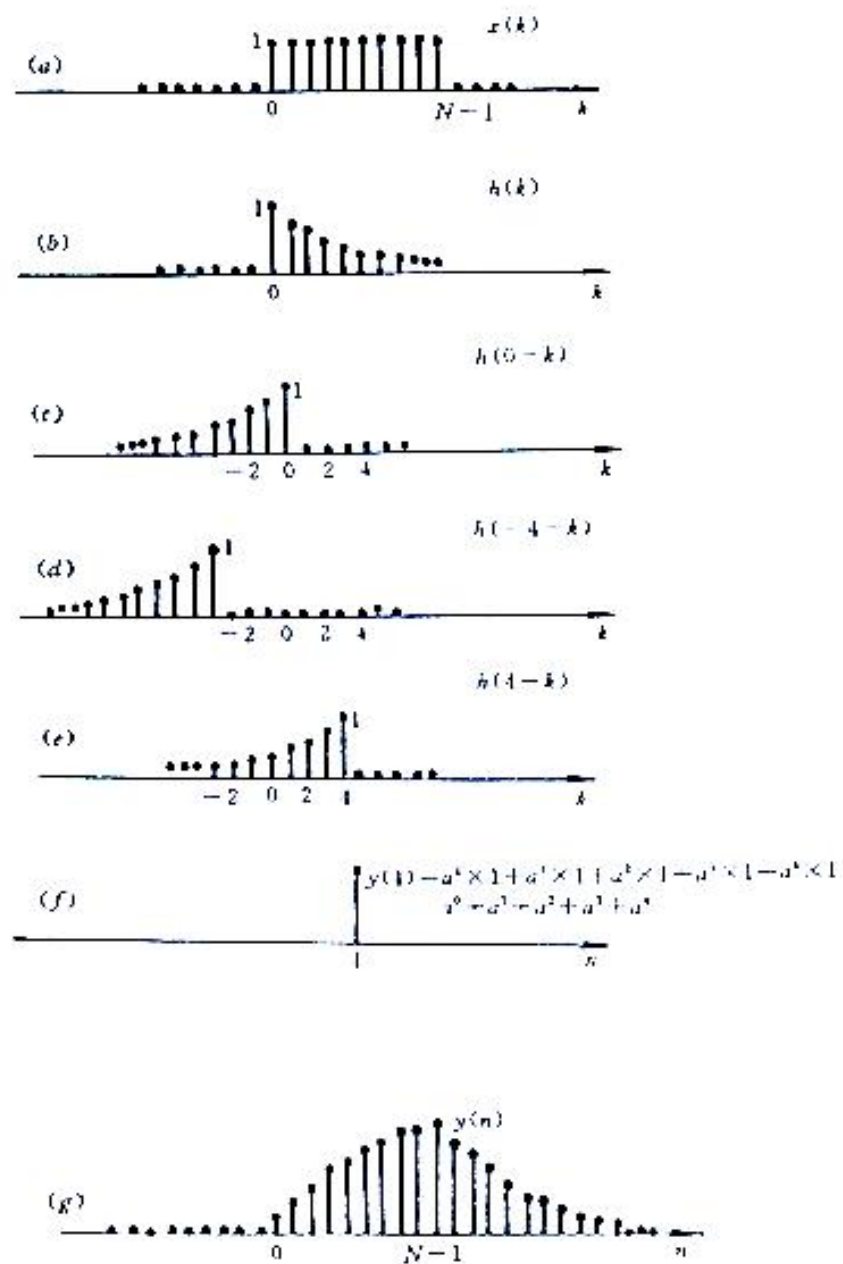


图 2-21 离散卷积计算过程



## § 2-4 离散时间线性非时变系统

### 六、系统的稳定性和因果性

∅ 稳定系统 P24  $s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

∅ 因果系统  $h(n) = 0 \quad n < 0$

∅ 稳定因果系统  $s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad h(n) = 0 \quad n < 0$

## § 2-4 离散时间线性非时变系统

### 七、常系数线性差分方程

#### ➤ 连续时间系统时域分析

数学模型：微分方程

补充：RTDS

Real Time Digital Simulator

实时数字仿真仪

#### ➤ 离散时间系统

数学模型：差分方程

$$y(n) \sim x(n): \quad \sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

$$h(n) \quad : \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

无限长单位脉冲  
响应数字滤波器

有限长单位脉冲  
响应数字滤波器

在学习数字信号处理过程中，带着下面问题思考：

**1.数字信号处理技术(DFT, FFT)在数字滤波器中怎么应用？**

**2.参考RTDS资料，分析系统工作原理，尤其关注本门数字信号处理课程知识点(DFT, FFT)在其中的应用。**

**3.信号与系统、数字信号处理与自动控制原理三门课程的联系和区别。**



RTDS (Real Time Digital Simulator) 实时数字仿真仪  
由加拿大曼尼托巴RTDS公司开发制造，是一种专门设计  
用于研究电力系统中电磁暂态现象的装置。

## HIGHLIGHT

### GTWIF



**Our latest power system  
simulation technology  
doubles backplane  
communication speed,  
reduces timestep length and  
increases the network  
solution size.**

## RTDS® Simulator

- Smart grid applications
- Distributed generation - wind, solar, fuel cells...
- True hard real time response for closed-loop testing
- Protective relay testing - line, transformer, busbar, generator...
- Control system testing - HVDC, SVC, FACTS...
- Large scale real time simulations
- Powerful parallel processing hardware and custom I/O
- Advanced and comprehensive user interface
- Extensive, well proven power and control system component libraries



## 实时仿真

RTDS是“实时的”模拟装置。实时是指电力系统的运算法则能被计算得足够快，因而能连续地产生输出，这些输出结果真实地代表了在实际网络中的情形。实时仿真使用户能测试物理设备和更有效更快地完成实时仿真的许多研究。

由于RTDS模拟器是实时的，因此它能被直接地连接到电力系统控制和保护装置上。例如，RTDS模拟器能用于测试HVDC（高压直流）控制器或继电保护装置。在RTDS上的测试比其他测试方法更全面，因为它能模拟许多恶劣的但很现实的情况，而这对于物理系统来说是不可能达到的。

## 数字仿真

RTDS不是实现系统元件的物理小型化，其元件参数和电路结构以软件模型为基础。RTDS的研究能被迅速而且方便地修改，从一个问题切换到另一个问题只需要最短的时间。研究序列能被设定并自动运行，批模拟只需要极少甚至不需要用户交互作用。

由于RTDS模拟器在有无用户交互作用 (交互式的或批处理形式运行)时都能运行。因此，装置能接受成千上万次的批处理测试而不需要监控。RTDS模拟器对装置的每个对测试的回应都将提供详细的报告。不论用户是对装置进行测试或只是运行模拟研究，RTDS都能提供很大的帮助。

在国际上RTDS已经得到广泛应用，逐步替代传统的物理模拟方式，如西门子、ABB等知名企业都有自己的RTDS实验室，将RTDS作为产品功能测试的重要手段，在国内RTDS也已经有20余家RTDS用户，其中有诸多电力供应商和主要保护制造厂家如许继、南瑞、国电南自、北京四方等，RTDS也在国内得到越来越多的认可。

RTDS由硬件和软件组合而成。RTDS的硬件主要由如GPC、RPC、3PC和TPC等运算板卡和其他相配套的输入输出板卡构成。



RTDS仿真装置包括一个广泛的电力系统控制系统元件模块库。用户能够通过连续现有的元件模块而组建起电力系统的回路和相关的控制回路。电力系统电路和控制系统电路的组装是在对用户友好的环境中用图形完成的。

RTDS仿真装置是一个理想的工具对保护和控制方案进行彻底的设计、研究和试验。当进行闭环试验的时候，应用大量的数学量和模拟量的输入/输出接口，实际的保护和控制装置能与RTDS的仿真装置相连以便与模拟的电力系统相互作用。



## § 2-5 离散时间信号和系统的频域分析

### 一、系统的频率响应

输入频率为 $\omega$ 的复指数序列

$$x(n) = Ae^{j(\omega n + \phi_x)} = Ae^{j\omega n} e^{j\phi_x}$$

对于线性  
非时变系统:

$$x(n-r) = Ae^{j\omega(n-r)} e^{j\phi_x} = e^{-j\omega r} \cdot x(n)$$

输出频率也为 $\omega$ 的复指数序列

$$y(n) = Be^{j(\omega n + \phi_y)} = Be^{j\omega n} e^{j\phi_y}$$

$$y(n-k) = Be^{j\omega(n-k)} e^{j\phi_y} = e^{-j\omega k} \cdot y(n)$$

$A(\omega), B(\omega)$ 隐含 $\omega$

## § 2-5 离散时间信号和系统的频域分析

### 一、系统的频率响应

输入输出方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k} y(n) = \sum_{r=0}^M b_r e^{-j\omega r} x(n)$$

$$y(n) = \frac{\sum_{k=0}^N b_r e^{-j\omega r}}{\sum_{r=0}^M a_k e^{-j\omega k}} x(n) = H(e^{j\omega}) g x(n)$$

$$\Rightarrow B e^{j\omega n} e^{j f_y} = H(e^{j\omega}) g A e^{j\omega n} e^{j f_x}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{y(n)}{x(n)} = \frac{B e^{j\omega n} e^{j f_y}}{A e^{j\omega n} e^{j f_x}} = \frac{B e^{j f_y}}{A e^{j f_x}} = \frac{B(\omega) e^{j f_y}}{A(\omega) e^{j f_x}}$$

$$x(n) = A e^{j\omega n} e^{j f_x}$$

$$x(n-r) = e^{-j\omega r} x(n)$$

$$y(n) = B e^{j\omega n} e^{j f_y}$$

$$y(n-k) = e^{-j\omega k} y(n)$$

系统频率响应，  
由结构参数决定

## § 2-5 离散时间信号和系统的频域分析

### 二、系统频率响应的两个性质

1.  $H(e^{j\omega})$  是  $\omega$  的连续函数

2.  $H(e^{j\omega})$  是  $\omega$  的周期函数，且周期为  $2\pi$

## § 2-5 离散时间信号和系统的频域分析

### 三、系统频率响应和单位取样响应的关系

$$\left\{ \begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega k} A e^{j\omega n} e^{j\phi_x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega k} \bullet x(n) \\ y(n) &= \frac{\sum_{k=0}^N b_r e^{-j\omega r}}{\sum_{r=0}^M a_k e^{-j\omega k}} x(n) = H(e^{j\omega}) \bullet x(n) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} x(n) &= A e^{j\omega n} e^{j\phi_x} \\ x(n-r) &= A e^{j\omega(n-r)} e^{j\phi_x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

## § 2-5 离散时间信号和系统的频域分析

### 四、序列的频域表示法

1.  $H(e^{j\omega})$  是  $\omega$  的连续函数

2.  $H(e^{j\omega})$  是  $\omega$  的周期函数，且周期为  $2\pi$

可以作傅氏级数展开

比较  $\left\{ \begin{array}{l} H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-j\omega n} \\ C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-j\omega n} \\ h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{array} \right.$

DTFT 离散时间傅里叶变换

$$\left\{ \begin{array}{l} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \\ x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{array} \right.$$

## 五、输出序列与输入序列的傅氏变化间的关系

离散时间线性非时变系统输入序列 $x(n)$ ，输出序列 $y(n)$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \right] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n-k)e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j\omega k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n-k)e^{-j\omega(n-k)}$$

凑公式表达形式

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

问题:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \\ \\ H(e^{j\omega}) = \frac{y(n)}{x(n)} = \frac{Be^{j\omega n} e^{jf_y}}{Ae^{j\omega n} e^{jf_x}} = \frac{Be^{jf_y}}{Ae^{jf_x}} \\ \\ \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} ? = \frac{y(n)}{x(n)} \end{array} \right.$$

问题:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{y(n)}{x(n)} = \frac{Be^{j\omega n}e^{jf_y}}{Ae^{j\omega n}e^{jf_x}} = \frac{Be^{jf_y}}{Ae^{jf_x}}$$

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \stackrel{?}{=} \frac{y(n)}{x(n)}$$

注意前提条件:

输入频率为 $\omega$ 的复指数序列

$$x(n) = Ae^{j(\omega n + f_x)}$$

输出频率也为 $\omega$ 的复指数序列

$$y(n) = Be^{j(\omega n + f_y)}$$



## § 2-5 离散时间信号和系统的频域分析

### 六、理想低通滤波器频率响应

一定要理解

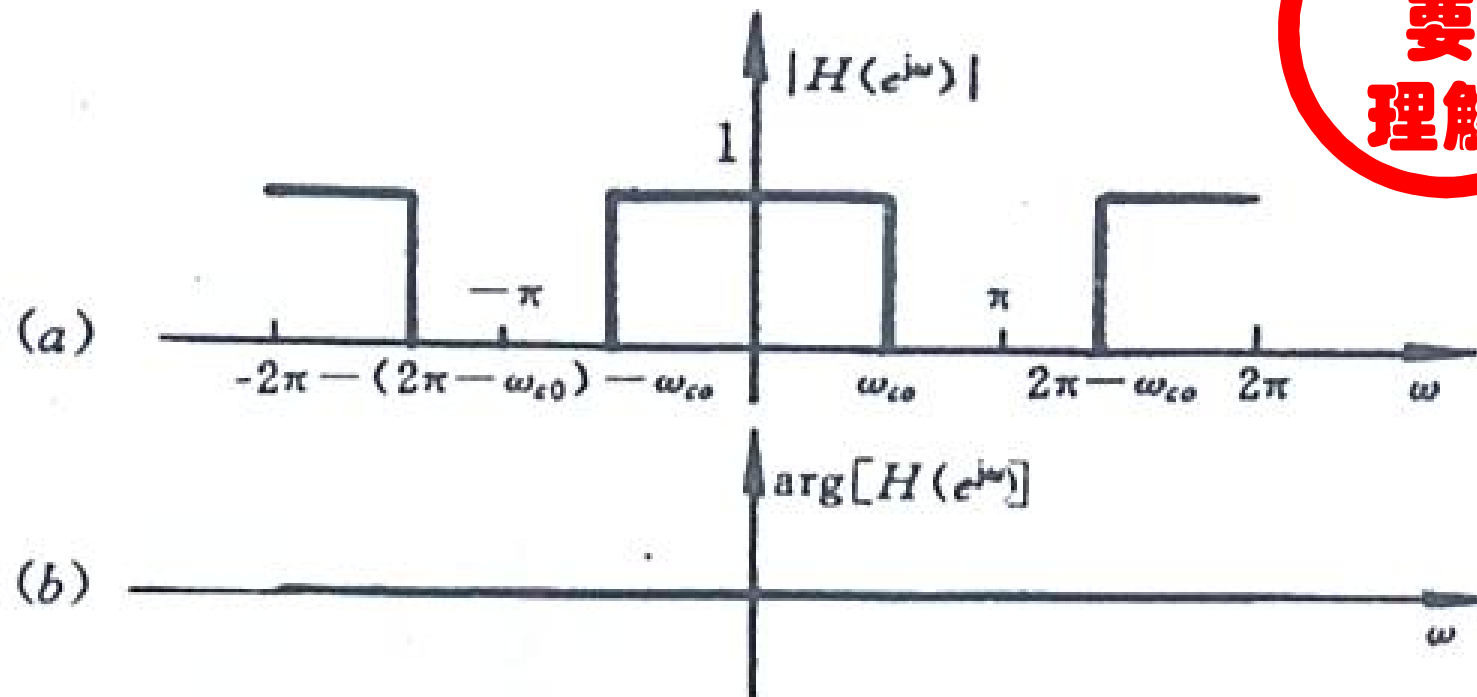


图 2—26 理想时域离散低通滤波器的频率响应

(a) 幅度响应      (b) 相位响应

## § 2-5 离散时间信号和系统的频域分析

理想低通滤波器单位取样响应

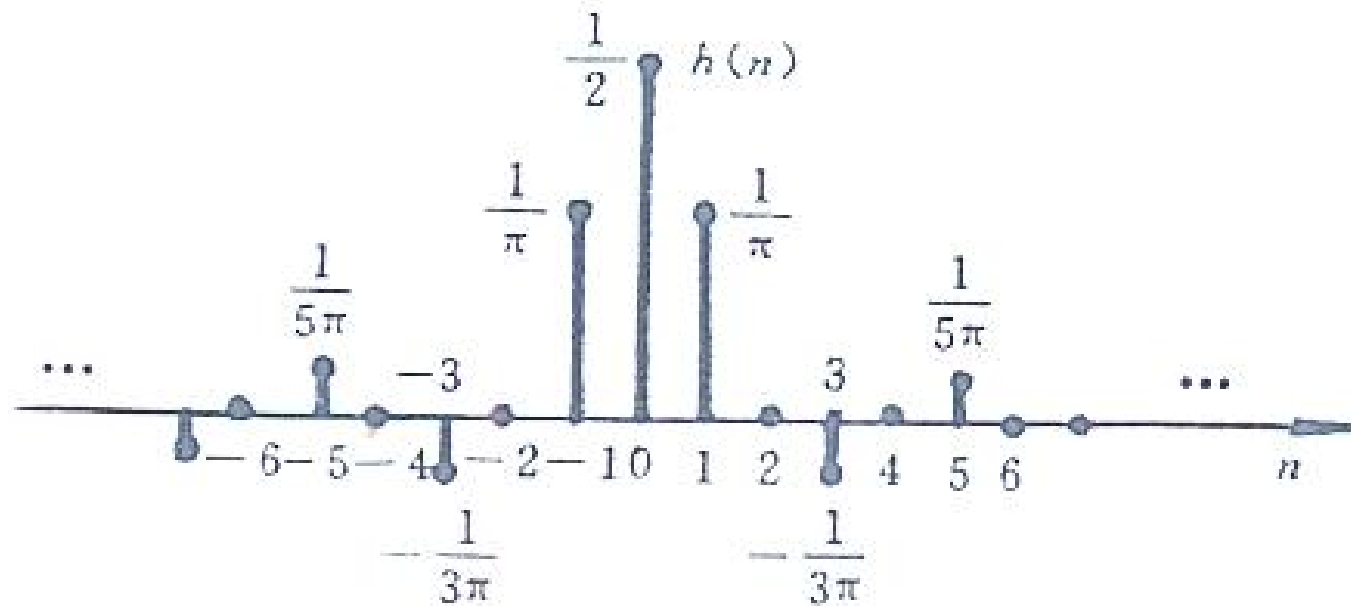


图 2-27 截止频率  $\omega_c = \pi/2$  之理想  
低通滤波器单位取样响应

## § 2-5 离散时间信号和系统的频域分析

$$\left\{ \begin{array}{l} H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_{c0} \\ 0 & \omega_{c0} < |\omega| \leq p \end{cases} \\ \text{注意：这是一个周期} \\ h(n) = \frac{1}{2p} \int_{-\omega_{c0}}^{\omega_{c0}} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega_{c0} n}{p n} \end{array} \right.$$

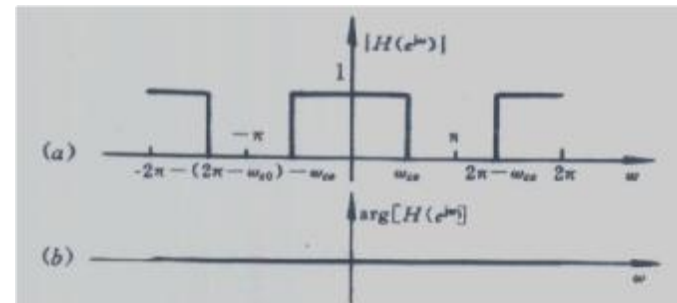


图 2-26 理想时域离散低通滤波器的频率响应  
(a) 幅度响应 (b) 相位响应

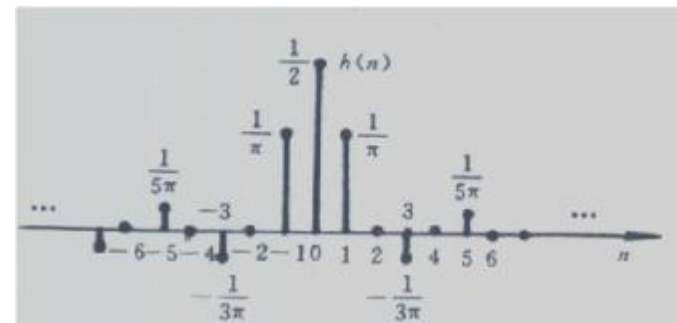


图 2-27 截止频率  $\omega_{c0} = \pi/2$  之理想低通滤波器单位取样响应

## § 2-5 离散时间信号和系统的频域分析

有关数字滤波器的一些概念：

1. 低频在0处，高频在 $\pi$ 处；
2. 频谱是连续周期的。

理想低通滤波器：

1. 非因果；
2. 不稳定。

伏笔：P32 指出理想低通滤波器 $h(n)$ 不绝对可和，也即不绝对收敛，因此不稳定，但其 $H(e^{j\omega})$ 存在？